Eidgenössische
Technische Hochschule
Zürich

Ecole polytechnique fédérale de Zurich
Politecnico federale di Zurigo
Federal Institute of Technology at Zurich

Institut für Theoretische Informatik
Markus Püschel
Peter Widmayer
Thomas Tschager
Tobias Pröger

22. September 2016

Datenstrukturen & Algorithmen — Blatt 1 — HS 16

Übungsstunde (Raum & Zeit): ______________________

Abgegeben von: ______________________

Korrigiert von: ______________________

erreichte Punkte: ____

Bitte benutzen Sie für die Aufgaben auf diesem Blatt die in der Vorlesung vorgestellten Definitionen von $\mathcal{O}$, Ω und Θ: Für eine Funktion $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ gilt

$$\mathcal{O}(g) := \left\{ f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+ \;\middle|\; \exists c \in \mathbb{R}^+, n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0 : f(n) \leq cg(n) \right\}. \tag{1}$$

Analog wächst f nicht langsamer als g, wenn $f \in \Omega(g)$ gilt mit

$$\Omega(g) := \left\{ f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+ \;\middle|\; \exists c \in \mathbb{R}^+, n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0 : f(n) \geq cg(n) \right\}. \tag{2}$$

Die Funktion f wächst asymptotisch gleich schnell wie g, wenn $f \in \mathcal{O}(g)$ und $f \in \Omega(g)$ gelten. Man schreibt dann $f \in \Theta(g)$ oder verkürzend auch $f = \Theta(g)$.

Aufgabe 1.1 *Beispiele.*

Zeigen Sie die folgenden Aussagen, indem Sie geeignete Konstanten c und n_0 angeben (Aufgabenteile a), c), d)) bzw. argumentieren, warum solche Konstanten nicht existieren (Aufgabenteil b)).

a) $3n^2 + 5n + 10 \in \mathcal{O}(n^2)$,

b) $n^{1/2} \notin \mathcal{O}(n^{1/3})$

c) $2^n \in \mathcal{O}(3^n)$

d) $\log_{10}(n) \in \mathcal{O}(n^{0.1})$ (Hinweis: Zeigen Sie mit der Regel von de L'Hôpital, dass $\frac{\log_{10}(n)}{n^{0.1}} \to 0$ für $n \to \infty$, und schlussfolgern Sie daraus die Aussage).

Aufgabe 1.2 *Ausdrücke vereinfachen.*

Es ist üblich in der $\mathcal{O}$-Notation, die Ausdrücke in den Klammern so weit es geht zu vereinfachen. Zum Beispiel schreibt man nicht $\mathcal{O}(3n + 1)$, sondern $\mathcal{O}(n)$. Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke in $\mathcal{O}$-Notation soweit wie möglich.

a) $\mathcal{O}(2n + 14n^2)$,

b) $\mathcal{O}(\log n + 3\sqrt{n})$,

c) $\mathcal{O}(16 \log_7(n^2))$,

d) $\mathcal{O}(6^{10} + \log^5(n) + \frac{n}{10})$.

Bitte wenden.

Aufgabe 1.3 *Eigenschaften der $\mathcal{O}$-Notation.*

Beweisen oder widerlegen Sie mit einem Gegenbeispiel die folgenden Aussagen. Es seien $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$.

a) Es gilt $f \in \mathcal{O}(g)$ genau dann, wenn $g \in \Omega(f)$.

b) Falls $f \in \mathcal{O}(g)$, dann ist $f(n) \leq g(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

c) Es gibt eine Funktion f, sodass weder $f \in \mathcal{O}(n)$, noch $f \in \Omega(n)$ gelten.

d) Es ist $\log_a(n) \in \Theta(\log_b(n))$ für alle Konstanten $a, b \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$.

e) Seien $f_1, f_2 \in \mathcal{O}(g)$ und $f(n) := f_1(n) + f_2(n)$. Dann ist auch $f \in \mathcal{O}(g)$.

f) Seien $f_1, f_2 \in \mathcal{O}(g)$ und $f(n) := f_1(n) \cdot f_2(n)$. Dann ist auch $f \in \mathcal{O}(g)$.

Aufgabe 1.4 *Asymptotisches Wachstum von Funktionen.*

Geben Sie für die untenstehenden Funktionen eine **Reihenfolge** an, so dass folgendes gilt: Wenn eine Funktion f links von einer Funktion g steht, dann gilt $f \in \mathcal{O}(g)$.

Beispiel: Die drei Funktionen n^3, n^7, n^9 sind bereits in der entsprechenden Reihenfolge, denn es sind $n^3 \in \mathcal{O}(n^7)$ und $n^7 \in \mathcal{O}(n^9)$.

$$n \log^3(n),\ \frac{n^2}{\log(n)},\ \log(2^n),\ 8^{11},\ n^n,\ n^3 + 7n,\ \sqrt{n},\ \log^5(n),\ 2^n$$

Abgabe: Am Donnerstag, den 29.9.2016, vor Beginn der Vorlesung im Eingangsbereich vor ML D28.