Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Ecole polytechnique fédérale de Zurich
Politecnico federale di Zurigo
Federal Institute of Technology at Zurich

Departement Informatik
Markus Püschel
Peter Widmayer
Thomas Tschager
Tobias Pröger

29. September 2016

Datenstrukturen & Algorithmen — Blatt 2 — HS 16

Abgabe: Am Donnerstag, den 6.10.2016, vor Beginn der Vorlesung um 10 Uhr im Eingangsbereich vor ML D28. Bitte heften Sie Ihre Blätter zusammen und benutzen Sie dieses Blatt als Deckblatt. Füllen Sie auch die ersten zwei der untenstehenden Felder aus.

Übungsstunde (Raum & Zeit): ______________________

Abgegeben von: ______________________

Korrigiert von: ______________________

erreichte Punkte: ____

Aufgabe 2.1 *Induktionsbeweise.*

Beweisen Sie die folgenden Aussagen mittels vollständiger Induktion über n.

a) $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

b) $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$

c) $\sum_{k=0}^{n} \binom{r+k}{r} = \binom{r+n+1}{n}$ für jede ganze Zahl $r \geq 0$

d) $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$

Hinweis: Die in der Vorlesung vorgestellten Identitäten $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ und $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ können hilfreich sein.

Aufgabe 2.2 *Abschätzung durch Integration.*

Beweisen Sie die in der Vorlesung vorgestellte Abschätzung

$$\ln(n!) = n\ln(n) - n + \mathcal{O}(\ln n),$$

indem Sie $\ln(n!)$ als Summe schreiben und durch Integrale geeignet nach unten und nach oben abschätzen.

Hinweis: Benutzen Sie zur Integration von $\ln(x)$ bzw. $\ln(x+1)$ partielle Integration. Es gilt $\ln(a \cdot b) = \ln(a) + \ln(b)$. Weiterhin dürfen Sie die Abschätzung $\ln(x+1) \leq \ln(x) + \frac{1}{x}$ für $x > 0$ ohne Beweis verwenden.

Bitte wenden.

Aufgabe 2.3 *Rekursionen auflösen.*

a) Sei $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ eine beliebige Funktion. Betrachten Sie die Rekursion

$$S(k) = \begin{cases} f(0) & \text{falls } k = 0 \text{ ist} \\ a \cdot S(k-1) + f(k) & \text{falls } k \geq 1 \text{ ist,} \end{cases}$$

wobei wir annehmen dass a konstant und $k \in \mathbb{N}_0$ ist. Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion über k, dass $S(k) = \sum_{i=0}^{k} a^i f(k-i)$ gilt.

b) Benutzen Sie Aufgabenteil a), um die Rekursion

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } n = 1 \text{ ist} \\ 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n & \text{falls } n = 2^k \text{ für } k \in \mathbb{N} \text{ ist} \end{cases}$$

zu lösen.

Aufgabe 2.4 *Algorithmenentwurf.*

Sie sind in einem 100-stöckigen Hochhaus und möchten herausfinden, ab welchem Stockwerk ein Ei zerbricht, wenn es von dort aus dem Fenster geworfen wird. Wenn Sie ein Ei von einem Stockwerk herunterwerfen und es nicht zerbricht, können Sie es für einen weiteren Versuch verwenden. Zerbricht es aber, dann kann es nicht mehr verwendet werden. Natürlich gilt: Zerbricht ein Ei, wenn es von Stockwerk i heruntergeworfen wird, dann zerbricht es auch dann, wenn es von einem höher liegenden Stockwerk $j > i$ heruntergeworfen wird. Zerbricht ein Ei hingegen nicht, dann zerbricht es auch dann nicht, wenn es von einem niedriger liegenden Stockwerk $k < i$ geworfen wird.

Ihre Aufgabe besteht nun darin, eine Strategie zu finden, die das gesuchte Stockwerk in jedem Fall findet und so wenig Versuche (nicht Eier) wie möglich verwendet. Es ist nicht zwingend vorgeschrieben, alle Eier zu zerbrechen. Falls Ihre Strategie aber alle gegebenen Eier zerbricht, dann müssen Sie das gesuchte Stockwerk eindeutig benennen können, und zwar sofort, nachdem das letzte Ei zerbrochen ist.

a) Entwickeln Sie eine solche Strategie unter der Annahme, dass Sie beliebig viele Eier zur Verfügung haben.

b) Entwickeln Sie eine solche Strategie unter der Annahme, dass Sie nur *zwei* Eier zur Verfügung haben.

   Hinweis: Überlegen Sie sich zuerst, welche Strategie Sie verwenden würden, wenn Sie nur ein Ei zur Verfügung hätten.