Eidgenössische
Technische Hochschule
Zürich

Ecole polytechnique fédérale de Zurich
Politecnico federale di Zurigo
Federal Institute of Technology at Zurich

Departement Informatik
Markus Püschel
Peter Widmayer
Thomas Tschager
Tobias Pröger

24. November 2016

Algorithmen & Datenstrukturen Blatt 10 HS 16

Abgabe: Am Donnerstag, den 01.12.2016, vor Beginn der Vorlesung um 10 Uhr im Eingangsbereich vor ML D28. Bitte heften Sie Ihre Blätter zusammen und benutzen Sie dieses Blatt als Deckblatt. Füllen Sie auch die ersten zwei der untenstehenden Felder aus.

Übungsstunde (Raum & Zeit): ______________________

Abgegeben von: ______________________

Korrigiert von: ______________________

erreichte Punkte: ____

Aufgabe 10.1 *Suchbäume.*

a) Zeichnen Sie den entstehenden Baum, wenn die Schlüssel $11, 2, 8, 9, 5, 17, 20, 24, 18, 30$ in dieser Reihenfolge in einen initial leeren natürlichen Suchbaum eingefügt werden.

b) Geben Sie die Preorder-, Postorder- und Inorder-Reihenfolgen für den Baum aus a) an.

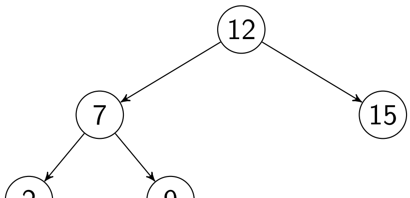
c) Löschen Sie aus dem Baum aus a) zunächst den Schlüssel 17 und danach aus dem entstehenden Baum den Schlüssel 11. Zeichnen Sie beide Bäume.

d) Zeichnen Sie den entstehenden Baum, wenn die Schlüssel aus Aufgabenteil a) in einen initial leeren AVL-Baum eingefügt werden.

Aufgabe 10.2 *Fragen zu Suchbäumen.*

a) Gegeben sei ein binärer Suchbaum T und eine Nummerierung der Knoten gemäss der Preorder- und der Postorder-Traversierung. Wie kann für zwei Knoten v und w in T nur mit Hilfe der jeweiligen Preorder- und Postorder-Nummern entschieden werden, ob w im Teilbaum von v liegt? Begründen Sie Ihre Antwort.

b) Sie sollen *einen* ganzzahligen Schlüssel in den folgenden AVL-Baum einfügen, sodass es zu einer *Doppelrotation* kommt. Alle im AVL-Baum gespeicherten Schlüssel müssen paarweise verschieden sein. Geben Sie *alle möglichen* ganzzahligen Kandidaten an.



Kandidaten: ______________.

Bitte wenden.

Aufgabe 10.3 *Anzahl verschiedener Suchbäume.*

Sei die Schlüsselmenge $\mathcal{K}_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ gegeben. Leiten Sie eine rekursive Formel her für die Anzahl verschiedener binärer Suchbäume, die genau die Schlüssel aus $\mathcal{K}_n$ verwalten. Die Rekursion muss *nicht* aufgelöst werden.

Aufgabe 10.4 *Matrixmultiplikation.*

In der Vorlesung wurde der Algorithmus von Strassen zur Multiplikation zweier $(n \times n)$-Matrizen A und B vorgestellt (siehe Mitschrift zur Vorlesung vom 3. November 2016). Dieser zerlegt A und B in vier $(n/2 \times n/2)$-Teilmatrizen und berechnet sieben Produkte von Matrizen der Grösse $(n/2 \times n/2)$.

a) Zeigen Sie zunächst, dass, wie in der Vorlesung behauptet, jede der vier Teilmatrizen von $A \times B$ tatsächlich als Summe bzw. Differenz von einigen dieser sieben Produkte ausgedrückt werden kann.

b) Zeigen Sie anschliessend, dass der Algorithmus von Strassen auch dann noch $\mathcal{O}(n^{\log_2 7})$ viele Operationen ausführt, wenn nicht nur elementare Multiplikationen, sondern auch noch elementare Additionen und Subtraktionen berücksichtigt werden. Stellen Sie dazu wie in der Vorlesung eine Rekursionsgleichung $A(n)$ auf, die die Anzahl elementarer Operationen zählt, die bei der Multiplikation zweier $(n \times n)$-Matrizen anfallen. Beachten Sie, dass die Addition bzw. Subtraktion zweier $(n \times n)$-Matrizen $\Theta(n^2)$ viele Additionen bzw. Subtraktionen einzelner Zahlen zur Folge hat. Lösen Sie dann $A(n)$ auf, indem Sie teleskopieren, und zeigen Sie die Korrektheit ihrer Auflösung mittels vollständiger Induktion über n. Begründen Sie kurz, warum $A(n) \in \mathcal{O}(n^{\log_2 7})$ ist.