Eidgenössische
Technische Hochschule
Zürich

Ecole polytechnique fédérale de Zurich
Politecnico federale di Zurigo
Federal Institute of Technology at Zurich

Departement Informatik
Markus Püschel
Peter Widmayer
Thomas Tschager
Tobias Pröger

29. September 2016

Datenstrukturen & Algorithmen — Lösungen zu Blatt 1 — FS 16

Lösung 1.1 *Beispiele.*

a) Wir haben $5n \leq n^2$ für $n \geq 5$, und $10 \leq n^2$ für $n \geq 4$ (also insbesondere auch für $n \geq 5$). Wir wählen also $n_0 = 5$ und $c = 5$ und erhalten

$$3n^2 + 5n + 10 \leq 3n^2 + n^2 + n^2 = 5n^2 = cn^2 \text{ für alle } n \geq n_0 = 5, \tag{1}$$

folglich ist $3n^2 + 5n + 10 \in \mathcal{O}(n^2)$.

b) Angenommen, es wäre $n^{1/2} \in \mathcal{O}(n^{1/3})$. Dann gäbe es Konstanten $c > 0$ und n_0, sodass $n^{1/2} \leq cn^{1/3}$ für alle $n \geq n_0$ gilt. Dann gälte aber auch $\frac{n^{1/2}}{n^{1/3}} = n^{1/2-1/3} = n^{1/6} \leq c$, was nicht möglich ist: Die Funktion $n^{1/6}$ konvergiert für $n \to \infty$ gegen ∞, folglich gibt es keine *Konstante* c, die $n^{1/6}$ nach oben beschränkt.

c) Hier genügt es, $c = n_0 = 1$ zu wählen, denn dann gilt $2^n \leq 3^n = c \cdot 3^n$ für alle $n \geq n_0 = 1$.

d) Die Regel von de L'Hôpital besagt, dass für zwei differenzierbare Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) \to \infty$ und $g(x) \to \infty$ für $x \to \infty$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} \tag{2}$$

gilt, falls $\lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existiert.

Wir setzen $f(x) = \log_{10}(x) = \ln(x)/\ln(10)$ und $g(x) = n^{0.1}$ und erhalten

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{1/(x\ln(10))}{0.1x^{-0.9}} = \frac{10x^{0.9}}{x\ln(10)} = \frac{10}{\ln(10)x^{0.1}} \xrightarrow[x\to\infty]{} 0, \tag{3}$$

folglich ist nach der Regel von de L'Hôpital $\lim_{n\to\infty} \frac{\log_{10}(n)}{n^{0.1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1/(x\ln(10))}{0.1x^{-0.9}} = 0$. Gemäss der Definition des Grenzwerts gibt es also für jedes $\varepsilon > 0$ ein n_0, sodass $\log_{10}(n) \leq \varepsilon n^{0.1}$ für alle $n \geq n_0$ gilt. Also können wir c *beliebig* wählen (z.B. $c = 1$), und aus der Definition des Grenzwerts folgt dann, dass es ein n_0 gibt sodass $\log_{10}(n) \leq n^{0.1}$ für alle $n \geq n_0$. Damit ist also auch $\log_{10}(n) \in \mathcal{O}(n^{0.1})$.

Hinweis: Man könnte an obiger Argumentation kritisieren, dass sie nicht konstruktiv ist. Man kann aber beobachten, dass $\log_{10}(10^{10}) = (10^{10})^{0.1} = 10$ gilt, und für $n > 10^{10}$ ist $\log_{10}(n) < n^{0.1}$. Konkrete Wahlen für die Konstanten wären also etwa $c = 1$ und $n_0 = 10^{10}$.

Lösung 1.2 *Ausdrücke vereinfachen.*

a) $\mathcal{O}(2n + 14n^2) = \mathcal{O}(n^2)$

b) $\mathcal{O}(\log n + 3\sqrt{n}) = \mathcal{O}(\sqrt{n})$

c) $\mathcal{O}(16\log_7(n^2)) = \mathcal{O}(\log(n^2)) = \mathcal{O}(2\log n) = \mathcal{O}(\log n)$

d) $\mathcal{O}(6^{10} + \log^5(n) + \frac{n}{10}) = \mathcal{O}(n)$

Lösung 1.3 *Eigenschaften der $\mathcal{O}$-Notation.*

a) Die Aussage ist wahr. Sie folgt direkt aus den Definitionen von $\mathcal{O}(g)$ bzw. $\Omega(f)$, denn es gilt

$$\begin{aligned} f \in \mathcal{O}(g) &\Leftrightarrow \exists c_1 \in \mathbb{R}^+, n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : f(n) \leq c_1 g(n) \\ &\Leftrightarrow \exists c_2 \in \mathbb{R}^+, n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : g(n) \geq c_2 f(n) \Leftrightarrow g \in \Omega(f). \end{aligned} \tag{4}$$

Als Konstante in der zweiten Zeile kann z.B. $c_2 = c_1^{-1}$ gewählt werden.

b) Die Aussage ist falsch. Wählen wir beispielsweise $f(n) = 2n$ und $g(n) = n^2$, dann ist $f \in \mathcal{O}(g)$, jedoch $f(1) > g(1)$.

c) Eine solche Funktion existiert, z.B.

$$f(n) = \begin{cases} 2^n & \text{falls } n \text{ gerade ist} \\ \sqrt{n} & \text{ansonsten.} \end{cases} \tag{5}$$

Wir beobachten, dass $f(n) \notin \mathcal{O}(n)$ gilt, denn $\frac{2^n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$ und kann daher durch keine Konstante nach oben beschränkt werden. Andererseits gilt aber auch $f(n) \notin \Omega(n)$, denn $\frac{\sqrt{n}}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ und kann daher durch keine strikt positive Konstante nach unten beschränkt werden.

d) Die Aussage ist wahr. Für alle $a, b \in \mathbb{N}$ ist $\log_a(n) = \frac{\log_b(n)}{\log_b(a)}$, also setzen wir $n_0 = 1$ und $c = (\log_b(a))^{-1}$. Dann sind für alle $n \geq n_0$

$$\log_a(n) \leq c\log_b(n) \text{ und } \log_a(n) \geq c\log_b(n), \tag{6}$$

also sind $\log_a(n) \in \mathcal{O}(\log_b(n))$ und $\log_a(n) \in \Omega(\log_b(n))$ und damit $\log_a(n) \in \Theta(\log_b(n))$.

e) Die Aussage ist wahr. Nach Definition sind

$$f_1 \in \mathcal{O}(g) \Leftrightarrow \exists c_1 \in \mathbb{R}^+, n_1 : \forall n \geq n_1 : f_1(n) \leq c_1 g(n), \tag{7}$$

$$f_2 \in \mathcal{O}(g) \Leftrightarrow \exists c_2 \in \mathbb{R}^+, n_2 : \forall n \geq n_2 : f_2(n) \leq c_2 g(n). \tag{8}$$

Mit $c := c_1 + c_2$ und $n_0 := \max\{n_1, n_2\}$ gilt für alle $n \geq n_0$

$$f(n) = f_1(n) + f_2(n) \leq c_1 g(n) + c_2 g(n) = cg(n), \tag{9}$$

folglich ist $f \in \mathcal{O}(g)$.

f) Die Aussage ist falsch. Man wähle z.B. $f_1(n) = f_2(n) = n$ und $g(n) = n$. Dann sind $f_1, f_2 \in \mathcal{O}(g)$, aber $f(n) = f_1(n) \cdot f_2(n) = n^2 \notin \mathcal{O}(n)$ (es gibt keine Konstanten $c > 0$ und n_0, sodass $n^2 \leq cn$ für alle $n \geq n_0$ gilt).

Lösung 1.4 *Asymptotisches Wachstum von Funktionen.*

Wir beobachten $\log(2^n) = n$ und $\sqrt{n} = n^{0.5}$. Ausserdem ist $n\log^3(n) \in \mathcal{O}(\frac{n^2}{\log(n)})$, weil $\log^4(n) \in \mathcal{O}(n)$ gilt. Die einzige (!) korrekte Reihenfolge lautet damit

$$8^{11},\ \log^5(n),\ \sqrt{n},\ \log(2^n),\ n\log^3(n),\ \frac{n^2}{\log(n)},\ n^3 + 7n,\ 2^n,\ n^n$$