



Algorithmen & Datenstrukturen

Blatt 1

HS 17

Übungsstunde (Raum & Zeit): _____

Abgegeben von: _____

Korrigiert von: _____

erreichte Punkte: _____

Dieses Blatt behandelt erneut stabiles Heiraten und den Algorithmus von Gale und Shapley. Wie in der Vorlesung nehmen wir an, dass die Männer die Heiratsanträge machen.

Aufgabe 1.1 *Übungsgruppen einteilen.*

Gegeben sei eine Menge von n Studenten $\mathcal{S} = \{s_1, \dots, s_n\}$ (dabei sei n gerade). Eine *Gruppeneinteilung* zerlegt \mathcal{S} in $n/2$ Teilmengen mit jeweils zwei verschiedenen Studenten. Analog zum Problem des stabilen Heiraten hat jeder Student eine absteigend sortierte Liste seiner Präferenzen der $n - 1$ anderen Studenten. Eine Gruppeneinteilung ist *stabil*, wenn es keine zwei Studenten gibt, die

- (1) in verschiedenen Gruppen sind, und die
- (2) den jeweils anderen Studenten höher präferieren als den Partner, mit dem sie aktuell in einer Gruppe sind.

Wir wollen zeigen, dass eine stabile Gruppeneinteilung u.U. nicht immer existiert.

- a) Zeichnen Sie alle möglichen Gruppeneinteilungen, wenn $n = 4$ Studenten gegeben sind.
- b) Geben Sie für jeden der $n = 4$ Studenten eine Reihenfolge der Präferenzen der anderen drei Studenten an, so dass keine der in a) gefunden Gruppeneinteilungen stabil ist. Begründen Sie auch für jede Gruppeneinteilung, warum sie nicht stabil ist.

Aufgabe 1.2 *Lügen.*

In dieser Aufgabe möchten wir beweisen, dass es sich für eine Frau lohnen kann zu lügen. Lügen bedeutet, dass der Lügner dem Algorithmus falsche Präferenzen angibt. Für einen Mann würde das bedeuten, dass er die Frauen in einer zu seinen Präferenzen abweichenden Reihenfolge anspricht. Für eine Frau heisst lügen, dass sie einen Mann zurückweist, den sie lieber mag als den Mann den sie stattdessen (zwischenzeitlich) behält. Lügen lohnt sich natürlich nur, wenn dadurch später ein besserer Partner gefunden wird.

a) Zeigen Sie, dass es für eine Frau durchaus von Vorteil sein kann, wenn sie lügt. Finden Sie dazu ein Beispiel mit je 3 Männern $\{m_1, m_2, m_3\}$ und 3 Frauen $\{f_1, f_2, f_3\}$, so dass sich Frau f_1 mit Lügen einen Vorteil verschaffen kann. Nehmen Sie an, dass alle anderen Männer und Frauen *nicht* lügen.

- Geben Sie für jeden Mann und jede Frau ihre wahren Präferenzen an.
- Geben Sie für f_1 ihre gelogenen Präferenzen an.
- Führen Sie den Algorithmus von Gale und Shapley zweimal aus: Einmal mit den wahren Präferenzen und einmal mit den gelogenen Präferenzen von f_1 .

Wahre Präferenzen der Männer:

m_1 : $\langle \text{-----}, \text{-----}, \text{-----} \rangle$

m_2 : $\langle \text{-----}, \text{-----}, \text{-----} \rangle$

m_3 : $\langle \text{-----}, \text{-----}, \text{-----} \rangle$

Wahre Präferenzen der Frauen:

f_1 : $\langle \text{-----}, \text{-----}, \text{-----} \rangle$

f_2 : $\langle \text{-----}, \text{-----}, \text{-----} \rangle$

f_3 : $\langle \text{-----}, \text{-----}, \text{-----} \rangle$

Gelogene Präferenzen von f_1 :

f_1 : $\langle \text{-----}, \text{-----}, \text{-----} \rangle$

Matching ohne Lüge:

$(m_1, \text{-----}), (m_2, \text{-----}), (m_3, \text{-----})$

Matching mit Lüge:

$(m_1, \text{-----}), (m_2, \text{-----}), (m_3, \text{-----})$

b) Ist das gefundene Matching mit Lüge stabil? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 1.3 *Optimalität der Zuordnung.*

In dieser Aufgabe sollen Sie zeigen, dass das Matching des Algorithmus von Gale und Shapley für die Männer optimal ist. Wir sagen, dass ein Matching *besser* als ein anderes ist, wenn darin kein Mann schlechter und mindestens ein Mann besser abschneidet. Optimal bedeutet nun also, dass kein anderes (stabiles) Matching besser ist.

Nehmen sie an, dass es n Männer und n Frauen gibt. Sei M_A das Matching, das der Algorithmus von Gale und Shapley findet, und sei M_B ein Matching, das besser als M_A ist. Wir wollen zeigen, dass M_B nicht existiert.

- a) Kann ein Mann in M_B eine andere Frau als in M_A heiraten, ohne sich zu verbessern? Begründen Sie Ihre Antwort.
- b) Zeigen Sie, dass es nicht möglich ist, dass eine Frau ihren Mann in M_B lieber mag als ihren Mann in M_A .

Beginnen Sie dazu mit einem Mann m , der sich verbessert. Seien f und f' die Frauen, die er in M_A respektive M_B heiratet. Es gilt,

$$m: \langle \dots, f', \dots, f, \dots \rangle.$$

Sei nun m' der Mann, den f' in M_A heiratet. Welchen Mann (m oder m') mag f' lieber? Begründen Sie Ihre Antwort.

$$f': \langle \dots, \text{-----}, \dots, \text{-----}, \dots \rangle.$$

Hinweis: Denken Sie daran, dass M_A vom Algorithmus von Gale und Shapley erstellt wird.

- c) **Knifflige Extraaufgabe:** Zeigen Sie nun, dass M_B nicht besser als M_A ist, indem Sie einen Mann in M_B finden, der schlechter abschneidet.

Betrachten Sie dazu alle Männer, die sich verbessern. Beginnen Sie mit demjenigen Mann m , der sich während des Algorithmus für M_A als *letzter* mit seiner Frau verlobt und betrachten Sie wiederum seine zwei Frauen f und f' in M_A respektive M_B . Begründen Sie Ihre Antwort.

Hinweis: Mann m ist noch nicht der gesuchte Mann.

Abgabe: Am Montag, den 2. Oktober 2017 zu Beginn Ihrer Übungsgruppe.