Eidgenössische
Technische Hochschule
Zürich

Ecole polytechnique fédérale de Zurich
Politecnico federale di Zurigo
Federal Institute of Technology at Zurich

Departement Informatik
Markus Püschel David Steurer Peter Widmayer
Chih-Hung Liu

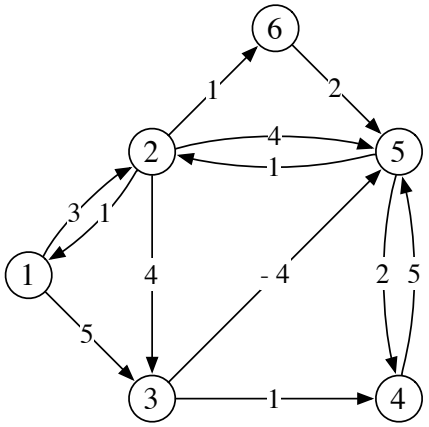
18. Dezember 2017

Algorithmen & Datenstrukturen Blatt 13 HS 17

Abgabe: Für dieses Übungsblatt gibt es keine Abgabe. Wir werden eine Beispiellösung auf der Webseite veröffentlichen.

Aufgabe 13.1 *Kürzeste Pfade bei negativen Kantengewichten.*

Wir betrachten folgenden Graphen:



a) Was ist die Länge des kürzesten Pfades von Knoten 1 zu Knoten 6?

b) Welche Pfadlänge berechnet Dijkstra's Algorithmus mit Startknoten 1 für Knoten 6? Geben Sie die Mengen A, B, C an, direkt bevor Dijkstra's Algorithmus den ersten Fehler macht und beschreiben Sie in Worten worin dieser Fehler besteht.[1]

c) Nennen Sie den Namen eines möglichst effizienten Algorithmus, der geeignet ist einen kürzesten Pfad von Knoten 1 zu Knoten 6 im gegebenen Graphen zu bestimmen. Welche Laufzeit hat dieser Algorithmus im Allgemeinen für Graphen mit n Knoten und m Kanten?

d) Führen Sie den Algorithmus von Floyd-Warshall zum Finden *aller* kürzesten Pfade von Hand auf dem Graphen aus. Geben Sie alle Einträge der berechneten $(6 \times 6 \times 7)$-Tabelle als 7 Tabellen mit Grösse jeweils 6×6 an (für jeden Eintrag genügt die Pfadlänge, der Vorgängerknoten muss nicht angegeben werden). Markieren Sie die Einträge der Tabellen, an denen man ablesen kann, dass der Graph keine negativen Zyklen enthält.

[1] Zur Erinnerung: Die Menge A enthält alle Knoten zu denen bereits der kürzeste Weg bekannt ist, die Menge B enthält alle von A aus erreichbaren Knoten die nicht in A sind und die Menge C enthält alle übrigen Knoten.

Aufgabe 13.2 *Eigenschaften minimaler Spannbäume.*

Gegeben sei ein gewichteter, ungerichteter, zusammenhängender Graph $G(V, E, w)$ mit $w(e) \in \mathbb{R}$ für alle Kanten $e \in E$. Beweisen Sie folgende Aussagen.

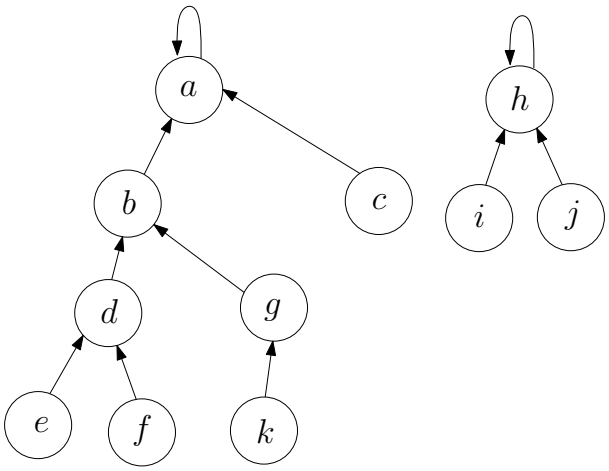
a) Es gibt einen Minimalen Spannbaum (englisch: minimum spanning tree; MST) in G.

b) Der MST ist eindeutig, wenn alle Kanten in E unterschiedliche Gewichte haben

c) Sei $G'(V, E, w')$ der Graph erhalten von $G(V, E, w)$, wenn alle Kanten um/mit dem gleichen Parameter $c \in \mathbb{R}^+$ addiert, subtrahiert, multipliziert oder dividiert werden, i.e., $\forall e \in E\colon w'(e) = w(e) \circ c$, wobei $\circ \in \{+, -, \cdot, :\}$. Dann gilt, jeder MST in G ist auch ein MST G' und jeder MST in G' ist auch ein MST in G.

Aufgabe 13.3 *Union Find von Hand.*

Führen Sie auf der folgenden Union-Find-Datenstruktur nacheinander folgende Operationen aus: Union(a, h), Find(e). Benutzen Sie dazu das Verfahren "Vereinigung nach Höhe", sowie Pfadverkürzung (Kompressionsmethode) beim Find, und zeichnen Sie die nach diesen zwei Operationen resultierende Datenstruktur.



Aufgabe 13.4 *AVL Trees.*

Gegeben sei ein AVL-Baum mit n Schlüsseln. Sie sollen nun den AVL-Baum so erweitern, dass für eine gegebene natürliche Zahl $k \in \{1, \ldots, n\}$, das k-te kleinste Element zurückgegeben werden kann, und zwar in $\mathcal{O}(\log n)$ Zeit. Beantworten Sie dazu folgende Fragen:

a) Welche Information benötigen Sie in jedem Knoten des Baumes?

b) Wie können Sie diese Information benützen um das k-te kleinste Element zu finden in $\mathcal{O}(\log n)$ Zeit?

c) Wie wird diese Information aktualisiert, wenn ein neuer Knoten in den Baum eingefügt wird? Und wie viel zusätzliche Zeit benötigen diese Updates?