Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Ecole polytechnique fédérale de Zurich
Politecnico federale di Zurigo
Federal Institute of Technology at Zurich

Departement Informatik
Markus Püschel David Steurer Peter Widmayer
Chih-Hung Liu

6. November 2017

Algorithmen & Datenstrukturen Blatt 7 HS 17

Übungsstunde (Raum & Zeit): ____________________

Abgegeben von: ____________________

Korrigiert von: ____________________

erreichte Punkte: ____

Aufgabe 7.1 *Rekursion.*

Gegeben sei eine Funktion $T : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_0^+$ mit $T(1) = 0$, $T(2) = 1$, und für $n \geq 3$ und $1 \leq k \leq n$,

$$T(n) \leq (n-1) + \frac{1}{n} \cdot \left(\Big(\sum_{m=1}^{k-1} T(n-m) \Big) + \Big(\sum_{m=k+1}^{n} T(m-1) \Big) \right).$$

Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion über n, dass $T(n) \leq 4n$ für $\forall n \in \mathbb{N}$ und $\forall k \in [1, n]$ gilt.

Aufgabe 7.2 *Sortieren.*

Gegeben sei ein Array $A = (A[1], \dots, A[n])$ ganzzahliger Schlüssel. In der Vorlesung wurde die folgende Invariante erwähnt:

Invariante $(*)$: Die letzten i Schlüssel des Eingabe-Arrays befinden sich in sortierter Reihenfolge auf den letzten i Positionen des Arrays.

Die Aufgabe besteht im Entwurf eines Algorithmus, der das Eingabe-Array A mittels dieser Invariante sortiert.

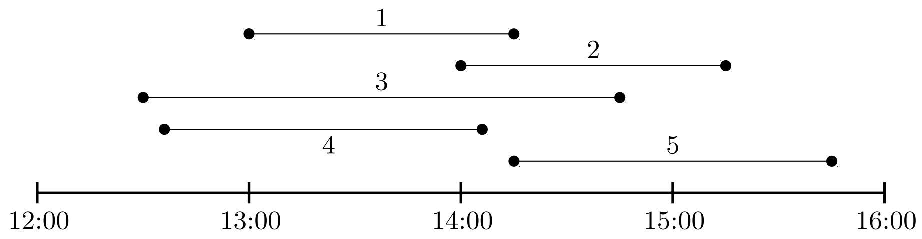
a) Benutzen Sie die Invariante zum Entwurf eines Sortieralgorithmus.

b) Analysieren Sie die Laufzeit Ihres Algorithmus.

c) Erklären Sie, für welche Art von Eingabe-Arrays Ihr Algorithmus nur $\mathcal{O}(n)$ Schlüsselbewegungen ausführt.

Aufgabe 7.3 *Umzugswagen mieten.*

Ein Student möchte umziehen und dazu einen Umzugswagen mieten. Es gibt verschiedene Angebote $1, \ldots, n$. Jedes Angebot i besteht aus einer frühestmöglichen Abholzeit a_i und einer spätestmöglichen Rückgabezeit r_i (natürlich ist $r_i > a_i$). Ein Angebot i ist *überflüssig*, wenn es ein anderes Angebot j mit einer früheren Abhol- und einer späteren Rückgabezeit gibt, d.h., wenn $a_j < a_i < r_i < r_j$ gilt. In den unten dargestellten Angeboten etwa sind die Angebote 1 und 4 aufgrund von Angebot 3 überflüssig.



Beschreiben Sie einen möglichst effizienten Algorithmus, der alle überflüssigen Angebote berechnet und ausgibt. Sie dürfen der Einfachheit halber annehmen, dass keine zwei Angebote die gleiche Abhol- oder die gleiche Rückgabezeit haben.

Aufgabe 7.4 *Gabrielgraphen berechnen.*

Gegeben sei eine Menge $P \subset \mathbb{R}^2$ von n Punkten in der euklidischen Ebene. Ein *Gabrielgraph* ist wie folgt definiert: Die Knoten des Graphen entsprechen den Punkten aus P, und eine Kante zwischen zwei Punkten u und v aus P gibt es genau dann, wenn der kleinste Kreis, der u und v enthält, keine anderen Punkte aus P enthält. Dieser Kreis ist also der Kreis mit Mittelpunkt auf der Mitte der Verbindungsstrecke zwischen u und v, der durch u und v geht.

Zeigen Sie, dass man (im Einheitskostenmodell, und wenn man Koordinaten nur vergleichen, aber nicht mit ihnen rechnen kann) zur Berechnung (der Adjazenzlistendarstellung) eines Gabrielgraphen für eine Menge von n Punkten mindestens $\Omega(n \log n)$ Schritte braucht.

Hinweis: Nehmen Sie an, dass man mit echt weniger als $\mathcal{O}(n \log n)$ vielen Schritten einen Gabrielgraphen berechnen könnte. Zeigen Sie, dass man dann auch mit echt weniger als $\mathcal{O}(n \log n)$ Schritten eine Menge von n Zahlen sortieren könnte.

Abgabe: Am Montag, den 13. November 2017 zu Beginn Ihrer Übungsgruppe.