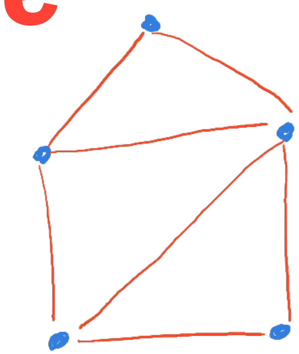
Vorlesung 1:

Graphentheorie

Markus Püschel
David Steurer



Algorithmen und Datenstrukturen, Herbstsemester 2018, ETH Zürich

Plan für die ersten Vorlesungen

Vorlesungen 1,2: wichtige *mathematische Grundlagen*;
Stil ähnlich der Vorlesung "Diskrete Mathematik",
aber andere Inhalte

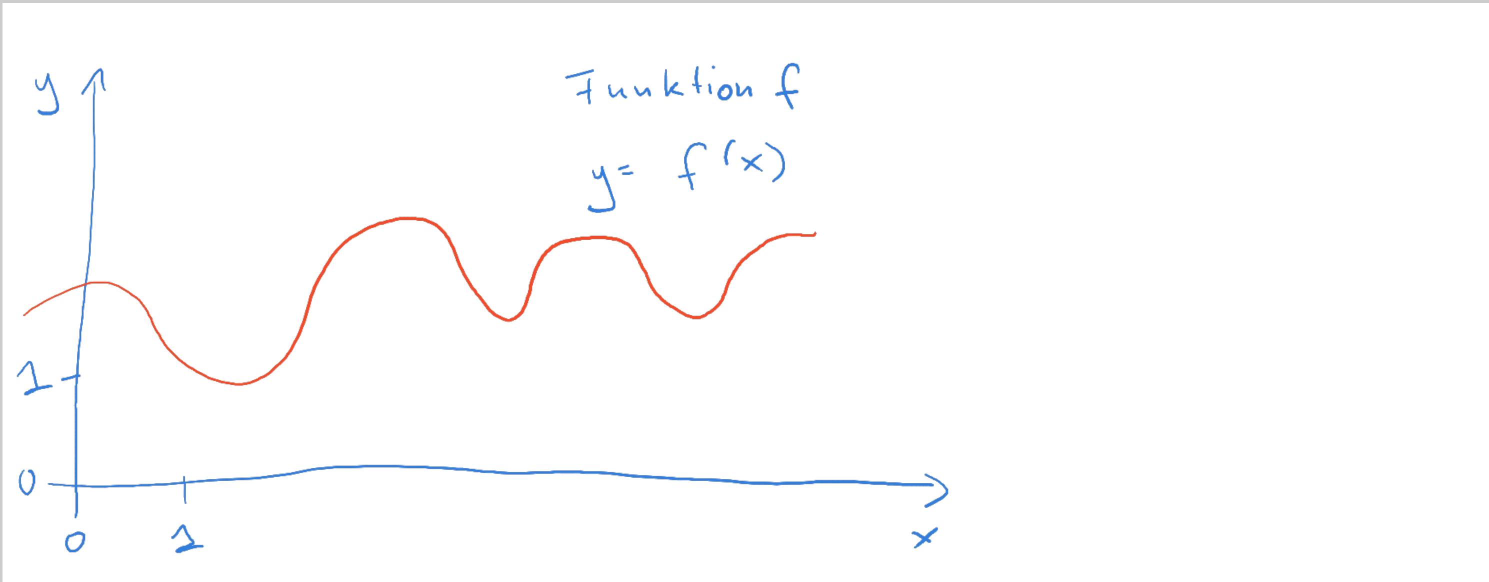
Vorlesungen 3,4: erste, darauf aufbauende Algorithmen;
Stil mehr *problemorientiert* und *algorithmisch*;
bis dahin schon *erste Programmierkentnisse*
(via "Einführung in die Programmierung")

Skript folgt noch *früherem Aufbau der Vorlesung*;
wird im Laufe des Semesters aktualisiert

bis dahin dienen *Vorlesungsfolien als Referenz*
(deshalb auch etwas ausführlichere Folien)

Funktionsgraph

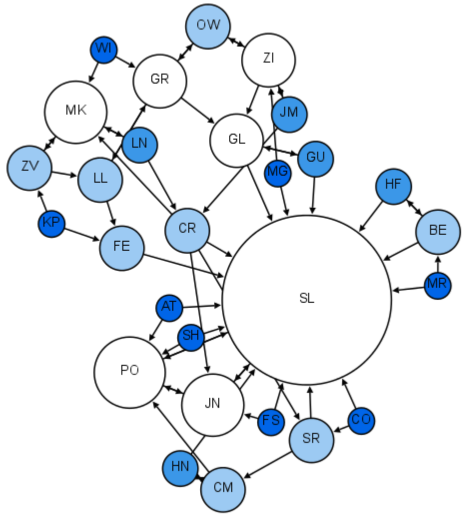
bekannt aus dem Schulunterricht

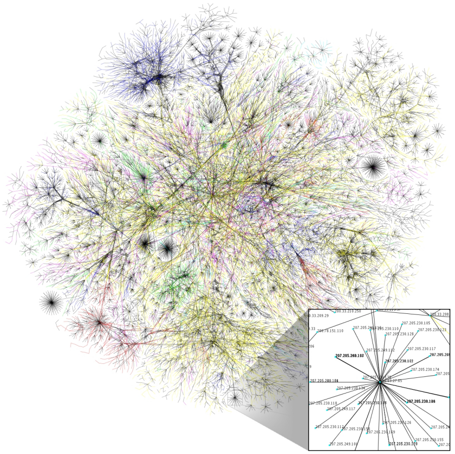


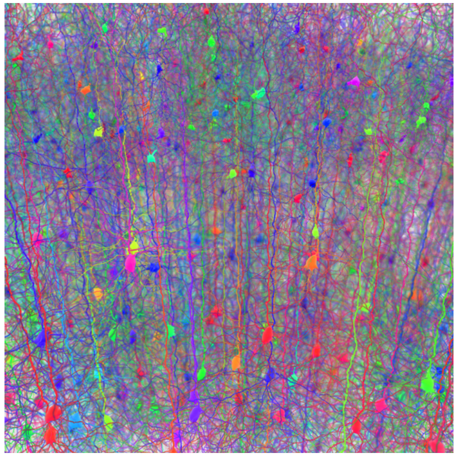
hat aber leider nichts mit Graphentheorie zu tun!

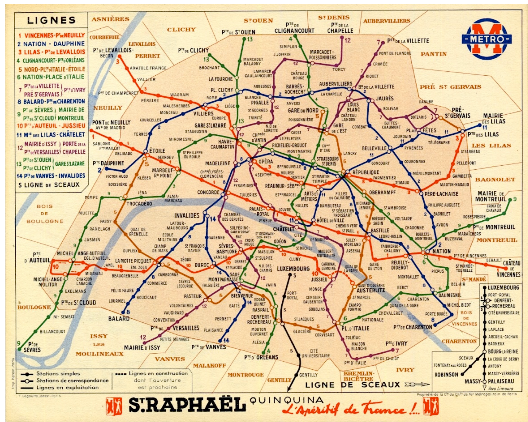
Universelles Phänomen: Netzwerke

- Soziale Netzwerke
- Strassennetzwerke
- Stromnetzwerke
- Computernetzwerke (z.B. Internet)
- Neuronale Netzwerke (im Gehirn oder für maschinelles Lernen)



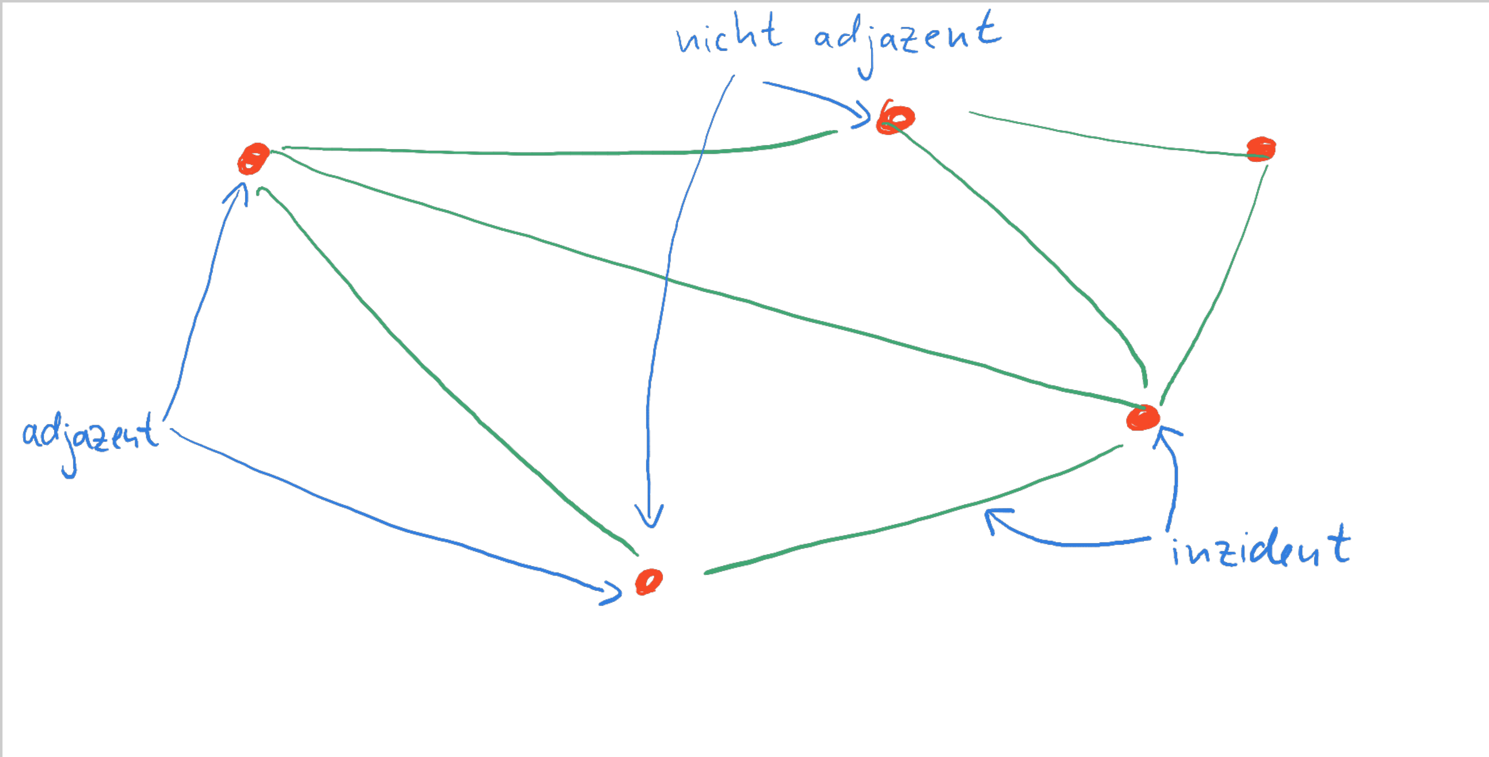






Graph (im Sinne der Graphentheorie)

informell: mathematisches Modell eines *Netzwerks*, bei dem unterschiedliche Objekte *miteinander verknüpft* sind



Begriffe: Knoten, Kanten, adjazent, inzident

Graphen vereinfachen und vereinheitlichen

Netzwerke spielen wichtige Rolle in *vielen unterschiedlichen Anwendungsbereichen*

Graphen lassen viele Details "realer Netzwerke" weg;
es zählt nur welche Knoten miteinander verbunden sind (und z.B. nicht wie die Knoten oder Verbindungen zustande kommen)

→ Graphen erlauben *einheitliche Beschreibung* verschiedener Netzwerke

Graphen stellen Herausforderungen dar

viele dieser Graphen können *sehr gross* sein (z.B. 10^{10} Knoten, 10^{12} Kanten beim sozialen Netzwerk auf facebook)

Computer notwendig um mit solchen Graphen umzugehen

→ *effiziente Algorithmen* dabei sehr wichtig

Graphen jenseits von Netzwerken

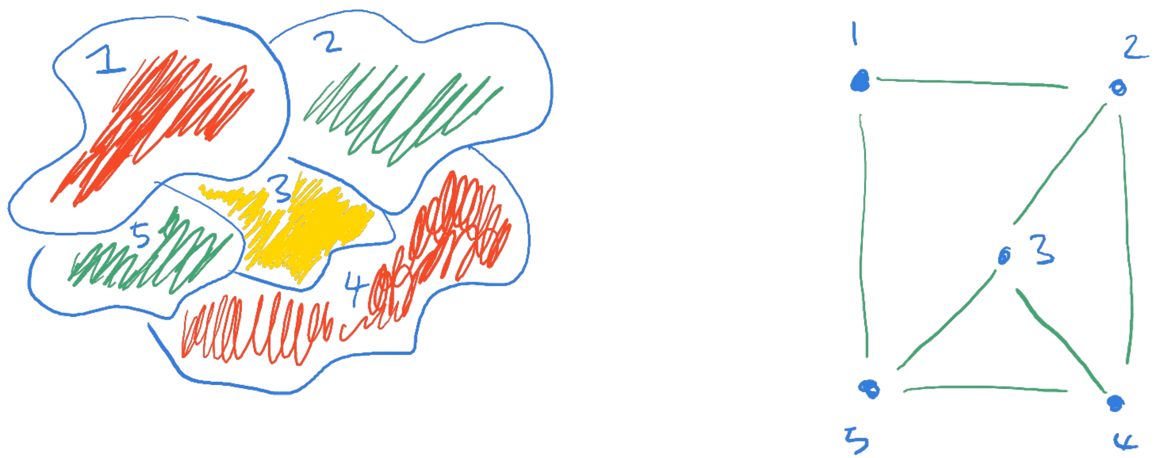
Graphen kommen auch in Situationen vor bei denen es zunächst nicht um Netzwerke geht

siehe *folgende Beispiele* ...

Kartenfärbung

- male jedes Land in einer Farbe
- benachbarte Länder müssen verschiedene Farben haben
- verwende möglichst wenig Farben

Beobachtung: es kommt nur darauf an welche Paare von Länder benachbart sind

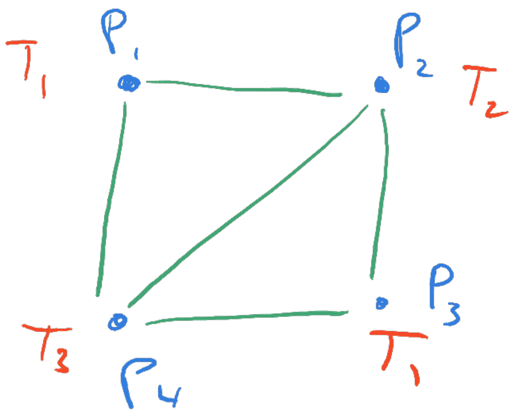


Prüfungsplanung

Eingabe: n geplante Prüfungen und k mögliche Termine
Ziel: weise jeder Prüfung einen Termin zu
Bedingung: zwei Prüfungen brauchen verschiedene Termine wenn $\geqslant 1$ Student beide Prüfungen schreibt

Beobachtung: nur wichtig für welche Paare von Prüfungen ein Konflikt besteht (d.h. $\geqslant 1$ Student schreibt beide)

Prüfungen P_1, P_2, P_3, P_4
Termine T_1, T_2, T_3
Konflikte $P_1 \; P_2$
$P_2 \; P_3$
$P_3 \; P_4$
$P_2 \; P_4$



Einsicht: "Kartenfärbung" und "Prüfungsplanung" sind im Kern dasselbe Problem (genannt "Knotenfärbung")

Graphentheorie liefert die Abstraktion um diese gemeinsame Struktur hervorheben

ermöglicht: diesselben Lösungsideen können auf viele verschiedene Problem angewandt werden

"die Macht der Abstraktion"

Graph als Mathematisches Objekt

Definition: ein *Graph* $G = (V, E)$ besteht aus:

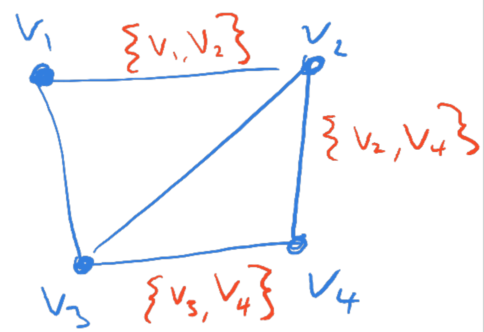
- Menge von *Knoten* $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ (englisch: vertices)
- Menge von *Kanten* $E = \{e_1, \ldots, e_m\}$ (englisch: edges)

dabei ist jede Kante e_k ein ungeordnetes Paar zweier Knoten v_i, v_j (also: $e_k = \{v_i, v_j\}$)

Begriffe: Knoten v_i, v_j sind *adjazent / benachbart* in G falls $\{v_i, v_j\} \in E$

Knoten v_i und Kante e_k sind *inzident* falls $v_i \in e_k$

Nachbarschaft $N_G(v_i)$ ist die Menge der benachbarten Knoten von v_i



Grad $\deg_G(v_i) := |N_G(v_i)|$ = Anzahl an Nachbarn von v_i

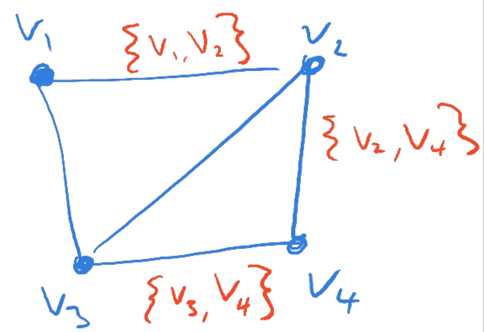
Graph als Mathematisches Objekt

Definition: ein *Graph* $G = (V, E)$ besteht aus:

- Menge von *Knoten* $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ (englisch: vertices)
- Menge von *Kanten* $E = \{e_1, \dots, e_m\}$ (englisch: edges)

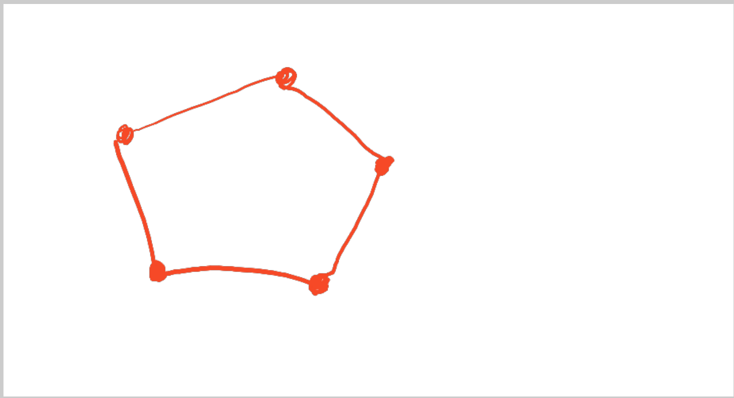
dabei ist jede Kante e_k ein ungeordnetes Paar zweier Knoten v_i, v_j (also: $e_k = \{v_i, v_j\}$)

ein Graph $G' = (V', E')$ heisst *Teilgraph* von G falls $V' \subseteq V$ und $E' \subseteq E$

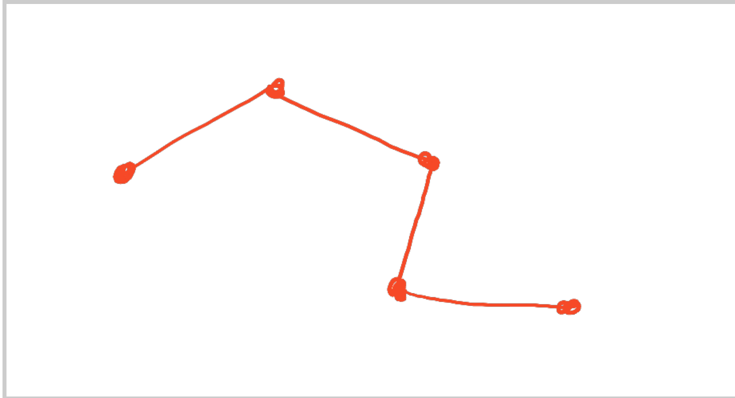


Besondere Graphen

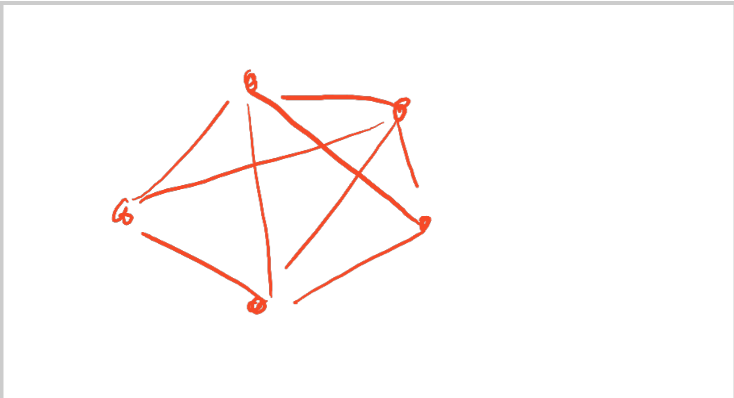
Kreis:



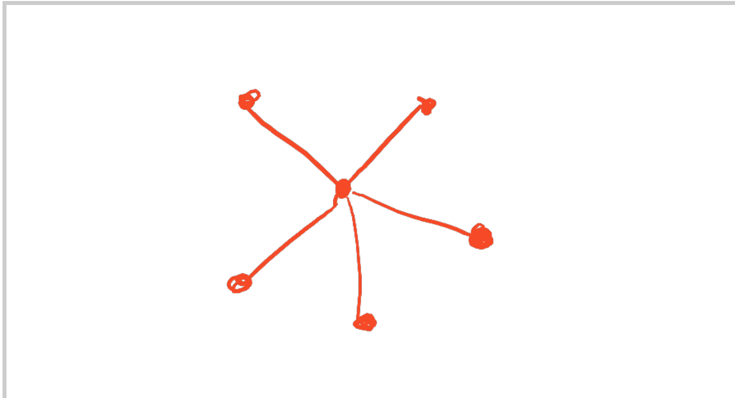
Pfad:



Clique:



Stern:



Erste Eigenschaft: Summe der Knotengrade

Satz: Für jeden Graphen G mit Knoten $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ und Kanten $E = \{e_1, \dots, e_m\}$ gilt

$$\deg_G(v_1) + \cdots + \deg_G(v_n) = 2m$$

Beweis: später

Erste Problemstellung

Knotenfärbung

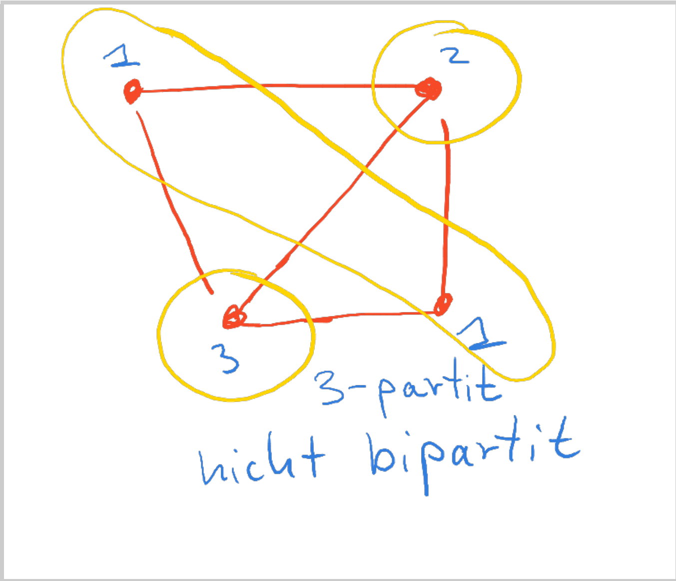
Eingabe: Graph $G = (V, E)$ und Anzahl k von Farben

Ziel: Färbe die Knoten von G wenn möglich mit k Farben, so dass jede Kante $e = \{u, v\}$ in G erfüllt, dass u und v unterschiedliche Farben haben

Begriffe: Falls solch eine Färbung existiert, nennt man den Graph k-*färbbar* oder k-*partit*

Für $k = 2$: *bipartit*

Herausforderung: Anzahl möglicher Färbungen ist *exponentiell* (k^n Färbungen von n Knoten mit k Farben)



Knotenfärbung

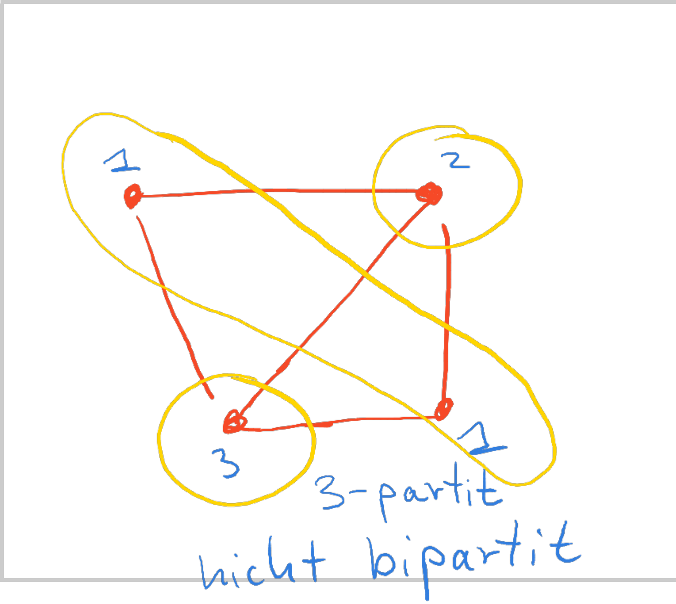
Eingabe: Graph $G = (V, E)$ und Anzahl k von Farben

Ziel: Färbe die Knoten von G wenn möglich mit k Farben, so dass jede Kante $e = \{u, v\}$ in G erfüllt, dass u und v unterschiedliche Farben haben

daher können nur für kleine Graphen alle Färbungen durchprobiert werden

Ausblick: die P$\neq$NP Vermutung besagt dass kein Algorithmus im Allgemeinen wesentlich besser sein kann (selbst für $k = 3$)

aber: Für $k = 2$ Farben gibt es sehr effiziente Algorithmen



Kombinatorische Explosion

mehr als 10^{10000} Färbungen von 50000 Knoten mit 2 Farben

100
000
000
000
000
000
000
000
000
000
000
000
000
000
000
000
000
000
000
000
000
000
000
000
000
000
000
000
000
000
000
000
000
000
000
000
000
000
000
000
000
000
000
0000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000

10^{60} Planck-Zeiteinheiten (10^{-43}s) seit Urknall

10^{80} Atome im Universum

mehr als 10^{10000} Färbungen von 50000 Knoten mit 2 Farben

10000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
0000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
0000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
0000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
0000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
0000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
0000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
0000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
0000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
0000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
0000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
0000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
0000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
0000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
0000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
0000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
0000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
0000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
0000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
0000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
0000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
0000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
0000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
0000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
0000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
0000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
0000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
0000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
0000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
0000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
0000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
0000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
0000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
0000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
0000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
0000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
0000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
0000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
0000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
0000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
0000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
0000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
0000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
0000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
0000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
0000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
0000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
0000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
0000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
0000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
0000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
0000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
0000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
0000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
0000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
0000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
0000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
0000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
0000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
0000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
0000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
0000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
0000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
0000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
0000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
0000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
0000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
0000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
0000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
0000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
0000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
0000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
0000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
0000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
0000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
0000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
0000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
0000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
0000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
0000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
0000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
0000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
0000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
0000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
0000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
0000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
0000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
0000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
0000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
0000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
0000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
0000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
0000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
0000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
0000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
0000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
0000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
0000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
0000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
0000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000

10^{60} Planck-Zeiteinheiten (10^{-43}s) seit Urknall

10^{80} Atome im Universum

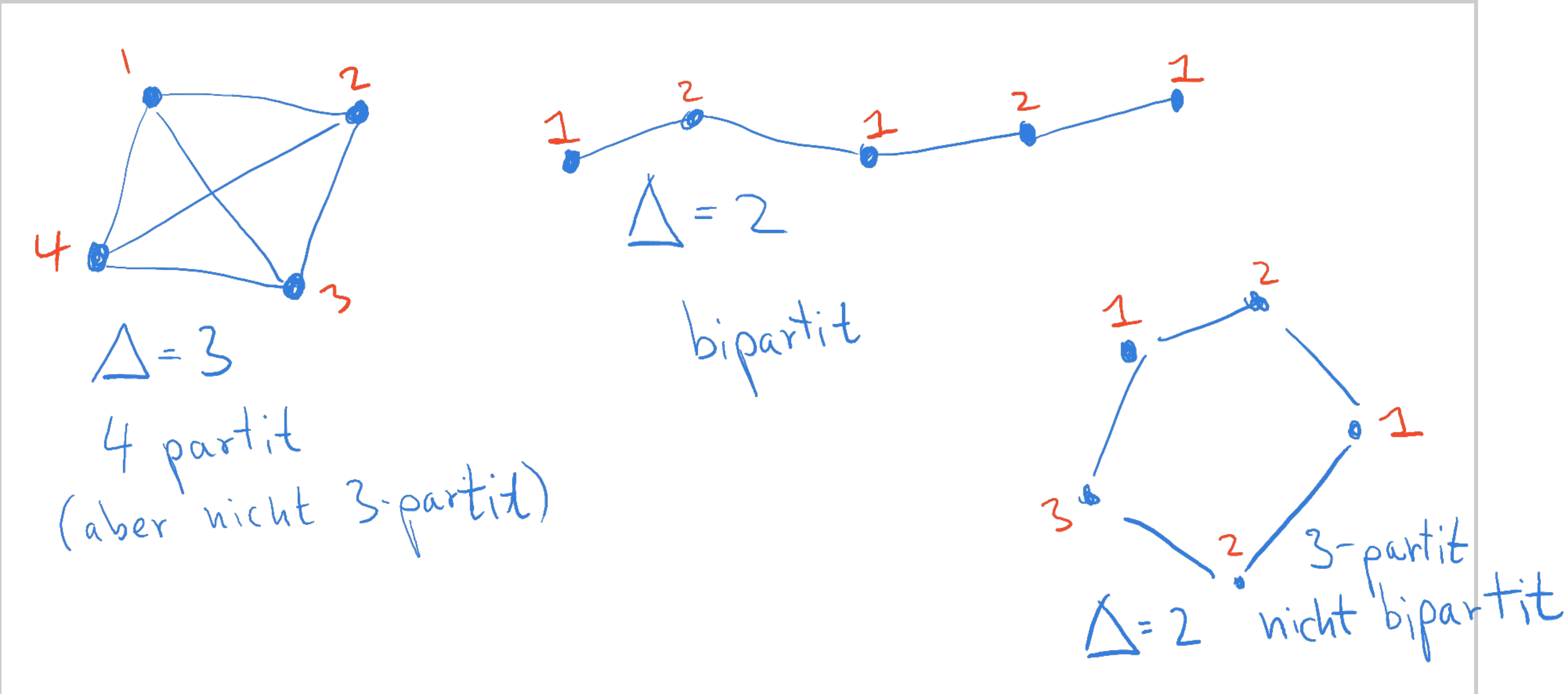
10^{9} "Rechenschritte" pro Sekunde auf modernem Computer

Hintergrund: *polynomielles* versus *exponentielles* Wachstum

Eigenschaft: Färbbarkeit und Knotengrade

Satz: jeder Graph mit maximalem Knotengrad Δ ist $(\Delta + 1)$-färbbar

Beispiele: Clique, Pfad, Kreis (gerader und ungerader Länge)



Bedeutung von Beweisen bei Algorithmen

als Algorithmiker haben wir sehr hohe Ansprüche

wir wollen 100% sicher sein, dass der Algorithmus funktioniert und die *richtige* Antwort *schnell* liefert …

… egal wie die Eingabe aussieht

wie können wir dieses Ziel erreichen?

das höchste Mass an Gewissheit liefern *mathematische Beweise*

(zumindest in der Weltanschauung der Informatiker)

Einschub: Vollständige Induktion

für alle $\qquad$ gilt

Ziel: zeige $\forall n \in \mathbb{N}.\ A(n)$ für eine Aussage $A(n)$, z.B.

$A(n)$: die Summe $1 + 2 + \cdots + n$ ist gleich $\frac{1}{2} n \cdot (n+1)$

$A(n)$: jeder Graph mit maximalem Grad Δ und n Knoten ist $(\Delta + 1)$-partit

Theorem: um zu zeigen dass eine Aussage $A(n)$ für alle natürlichen Zahlen $n \geqslant 1$ gilt, reicht folgendes aus:

- *Induktionsanfang:* zeige, dass $A(1)$ gilt
- *Induktionsschritt:* zeige $A(n-1) \rightarrow A(n)$ für alle $n \geqslant 2$

im Induktionsschritt müssen wir $A(n)$ zeigen, aber dürfen dabei annehmen dass $A(n-1)$ gilt (*Induktionshypothese*)

Induktionsbeispiel 1: Summenformel

$A(n)$: die Summe $1 + 2 + \cdots + n$ ist gleich $\frac{1}{2} \cdot n \cdot (n+1)$

Induktionsanfang: zeige $A(1)$

in der Tat gilt $1 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (1+1)$

Induktionsschritt: zeige $A(n-1) \to A(n)$ für all $n \geqslant 2$

nach *Induktionshypothese* gilt:

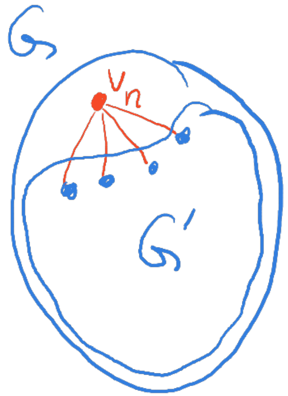
$$\underbrace{1 + 2 + \cdots + n - 1} + n = \underbrace{\tfrac{1}{2} \cdot (n-1) \cdot n} + n$$

mit etwas Algebra sehen wir:

$$\frac{1}{2} \cdot (n-1) \cdot n + n = \frac{1}{2} \cdot n \cdot (n+1) \qquad \square$$

Induktionsbeispiel 2: Färbung und Knotengrad

$A(n)$: jeder Graph mit n Knoten und maximalem
Knotengrad $\leqslant \Delta$ ist $(\Delta + 1)$-partit



Induktionsanfang: zeige $A(1)$

in der Tat ist jeder Graph mit nur einem Knoten 1-partit

Induktionsschritt: zeige $A(n-1) \to A(n)$ für all $n \geqslant 2$

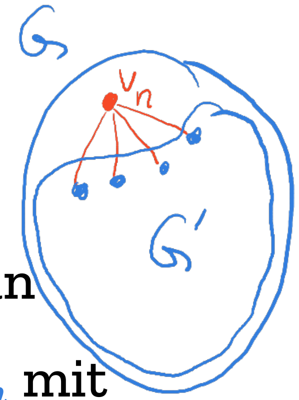
entferne Knoten v_n von G (und all inzidente Kanten) und wende *Induktionshypothese* auf resultierenden Graph G' an

betrachte Färbung von G' mit $\Delta + 1$ Farben und färbe v_n mit einer der $\Delta + 1$ Farben, die nicht von seinen $\leqslant \Delta$ Nachbarn verwendet wird

so erhalten wir gültige Färbung von G mit $\Delta + 1$ Farben $\square$

Induktionsbeispiel 2: Färbung und Knotengrad

$A(n)$: jeder Graph mit n Knoten und maximalem Knotengrad $\leqslant \Delta$ ist $(\Delta + 1)$-partit



Induktionsschritt: zeige $A(n-1) \to A(n)$ für all $n \geqslant 2$

entferne Knoten v_n von G (und all inzidente Kanten) und wende *Induktionshypothese* auf resultierenden Graph G' an

betrachte Färbung von G' mit $\Delta + 1$ Farben und färbe v_n mit einer der $\Delta + 1$ Farben, die nicht von seinen $\leqslant \Delta$ Nachbarn verwendet wird

so erhalten wir gültige Färbung von G mit $\Delta + 1$ Farben $\square$

Ausblick: Beweis "enthält" *effizienten Alg.* der solche Färbungen findet