

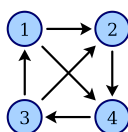
## Algorithmen und Komplexität Assistentengespräch 2

Melde dich für einen 15 minütigen Timeslot auf [www.pele.ethz.ch](http://www.pele.ethz.ch) während des Zeitfensters vom 21.10.2019 bis 08.11.2019 an.

\* \* \*

### Aufgabe 1

Ein gerichteter Graph ist ein Graph in dem die Kanten eine Richtung haben. Formal ist ein gerichteter Graph ein Tupel  $(V, A)$  bestehend aus einer Knotenmenge  $V$  und einer Kantenmenge  $A$ , welche eine Menge von geordneten Knotenpaaren  $(u, v)$  ist. Ein Turnier ist ein gerichteter Graph  $D = (V, A)$  in welchem für jedes Paar von Knoten  $u, v \in V$  genau eine der beiden möglichen Kanten vorhanden ist, das heisst entweder gilt  $(u, v) \in A$  oder  $(v, u) \in A$  gilt. Ein Beispiel eines Turniers mit 4 Knoten ist als Bild gegeben. Es sei  $\{v_1, \dots, v_n\}$  die Knotenmenge eines gerichteten Graphen. Dann ist die Adjazenzmatrix  $A$  definiert durch  $a_{i,j} = 1$  falls  $(v_i, v_j) \in A$  und  $a_{i,j} = 0$  falls  $(v_i, v_j) \notin A$ . Ein gerichteter Pfad der Länge  $k$  ist eine Folge  $u_1, \dots, u_k$  unterschiedlicher Knoten sodass  $(u_i, u_{i+1}) \in A$  für  $i = 1, \dots, k - 1$ .



- Beweisen Sie per Induktion über die Anzahl Knoten, dass es in jedem Turnier einen gerichteten Pfad der Länge  $|V|$  gibt.
- Wandeln Sie die Idee aus a) in einen Algorithmus um. Das heisst, entwerfen Sie einen Algorithmus, welcher einen Knoten nach dem anderen an einer geeigneten Stelle in den bislang konstruierten gerichteten Pfad einsetzt und somit in Laufzeit  $O(|V|^2)$  einen gerichteten Pfad der Länge  $|V|$  findet.
- Beschreiben Sie einen Algorithmus, der einen solchen Pfad findet und dabei nur auf  $O(|V| \log |V|)$  Elemente von  $A$  zugreift.  
*Hinweis:* Versuchen Sie ähnlich zur Binären Suche den neuen Knoten mit nur  $\mathcal{O}(\log(|V|))$  Zugriffe auf  $A$  an einer geeigneten Stelle in den Pfad einzusetzen.
- Beweisen Sie, dass es für dieses Problem keinen Algorithmus gibt, der nur auf  $O(|V|)$  Elemente von  $A$  zugreift.  
*Hinweis:* Zeigen Sie, dass man ansonsten  $n$  Zahlen mit  $\mathcal{O}(n)$  Vergleichen sortieren könnte.

PRÄSENTATION DER AUFGABE WÄHREND DES ZEITFENSTERS VOM 21.10.19 BIS 08.11.19.