

Algorithmen und Komplexität (D-MATH) Klausur Winter 2017

Kandidat/in:

Name:
Vorname:
Stud.-Nr.:

Ich bezeuge mit meiner Unterschrift, dass ich die Prüfung unter regulären Bedingungen ablegen konnte und dass ich die unten stehenden allgemeinen Bemerkungen gelesen und verstanden habe.

Unterschrift:

Allgemeine Bemerkungen und Hinweise:

- Diese Prüfung besteht neben diesem doppelseitigen Deckblatt aus 3 beidseitig bedruckten Aufgabenblättern mit insgesamt Aufgaben.
- Als einziges Hilfsmittel sind 10 beidseitig handschriftlich beschriebene A4-Blätter erlaubt.
- Falls Sie während der Prüfung in irgendeiner Weise gestört oder beeinträchtigt werden, melden Sie dies sofort der Aufsichtsperson. Spätere Klagen werden nicht akzeptiert.
- **Schreiben Sie nicht mit Bleistift! Abgaben, die mit Bleistift geschrieben sind, werden nicht bewertet. Das Verwenden von roter und grüner Farbe sowie von Tippex ist ebenfalls nicht erlaubt.**
- Alle Mobiltelefone und sonstigen elektronischen Geräte müssen vollständig ausgeschaltet sein und im Gepäck verstaut werden.
- **Alle Antworten müssen für den Korrektor verständlich begründet werden. Schreiben Sie die wesentlichen Lösungsgedanken in klaren Sätzen oder Stichworten hin. Unverständliche oder nicht begründete Antworten werden nicht bewertet.**
- Pro Aufgabe ist höchstens eine gültige Version eines Lösungsversuchs zulässig. Streichen Sie ungültige Lösungsversuche klar durch.
- Sie dürfen alle Aufgaben in beliebiger Reihenfolge lösen. Konzentrieren Sie sich jeweils auf eine Aufgabe, aber teilen Sie sich Ihre Zeit ein.
- Abschreiben und sonstige Versuche des Betrugs führen zum sofortigem Ausschluss von der Prüfung und können rechtliche Folgen haben.
- Die Prüfung dauert zwei Stunden. Falls Sie vorzeitig fertig werden sollten, melden Sie sich durch Handaufhalten bei einer der Aufsichtspersonen und verlassen Sie still den Raum. **In den letzten 20 Minuten der Prüfung kann der Raum nicht mehr verlassen werden.**
- **Vergessen Sie nicht, dieses Deckblatt zu unterschreiben, und beschriften Sie jedes abgegebene Blatt mit Ihrem Namen. Die Aufgabenblätter sind mit abzugeben.**

Viel Erfolg!

	Erreichte Punktzahl (maximal)	Visum
Σ	()	

Aufgabe 1

(total Punkte)

Welche der folgenden Aussagen treffen zu, und welche nicht? Begründen Sie jeweils Ihre Antwort. Für jede richtige Antwort erhalten Sie 1 Punkt, weitere 2 Punkte werden jeweils für eine korrekte Begründung verteilt.

- (a) $\exp(\cos(n)) = O(1)$.
- (b) QUICKSORT ist immer schneller als MERGESORT.
- (c) In einem Fibonacci-Heap benötigt die Extract-Min(H) Operation immer $O(1)$ Zeit.
- (d) Ist A ein Algorithmus, der 3-SAT in polynomieller Zeit löst, so existiert ein Algorithmus A' , der TRIPARTITESMATCHING in polynomieller Zeit löst.

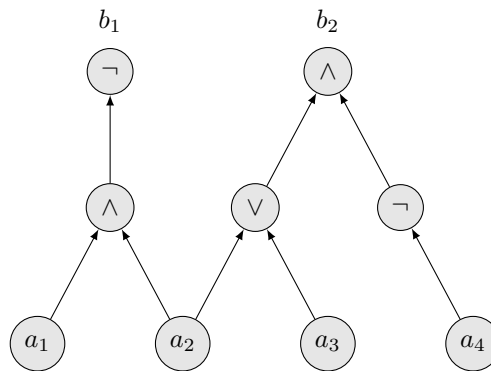
(4 · 3 = 12 Punkte)

Aufgabe 2

(total Punkte)

Welche der folgenden Aussagen treffen zu, und welche nicht? Begründen Sie jeweils Ihre Antwort. Für jede richtige Antwort erhalten Sie 1 Punkt, weitere 3 Punkte werden jeweils für eine korrekte Begründung verteilt.

- (a) Hat in einem zusammenhängenden Graphen jeder Knoten mindestens Grad 2, so existiert ein Hamilton-Pfad (ein Pfad, der jeden Knoten genau einmal besucht).
- (b) Auf jedem $(2, 4)$ -Baum der den Schlüssel 6 aber keinen Schlüssel 5 enthält gilt: Führen wir zuerst DELETE(6) und anschliessend INSERT(5) aus, so erhalten wir den gleichen Baum, wie wenn wir zuerst INSERT(5) und dann DELETE(6) ausführen.
- (c) Sei $N = (V, E, \ell)$ ein zusammenhängendes Netzwerk, in dem alle Kanten verschiedene Gewichte haben. Dann ist die Kante mit dem kleinsten Gewicht in jedem minimalen Spannbaum enthalten.
- (d) Gibt es eine Eingabe a , mit welcher der untenstehende Schaltkreis die Ausgabe $b = (0, 0)$ berechnet?



(4 · 4 = 16 Punkte)

Aufgabe 3

(total Punkte)

- a) Ein Turnier ist ein gerichteter Graph $D = (V, A)$, in welchem für jedes Paar von Knoten $u, v \in V$ entweder $(u, v) \in A$ oder $(v, u) \in A$ gilt.

Sei D ein Turnier, in dem es keinen gerichteten Kreis der Länge 3 gibt. Beweisen Sie, dass D überhaupt keinen gerichteten Kreis enthält.

(8 Punkte)

- b) Wir wollen aus einer gegebenen Liste von n verschiedenen Zahlen a_1, \dots, a_n die $\lceil \log n \rceil$ kleinsten Zahlen ausgeben (nicht zwingend sortiert!). Erklären Sie kurz, wie man dies in linearer Laufzeit erreichen kann. Ein in der Vorlesung behandelter Algorithmus könnte dabei behilflich sein.

(8 Punkte)

Aufgabe 4

(total Punkte)

Wir betrachten die folgende Sprache:

SUPER-SAT

Eingabe: eine boolesche Formel in konjunktiver Normalform, $F = \bigwedge_{j=1}^m C_j$

Frage: Gibt es eine Belegung von F , so dass in jeder Klausel mindestens zwei Literale erfüllt sind?

Beweisen Sie, dass die Sprache SUPER-SAT \mathcal{NP} -vollständig ist.

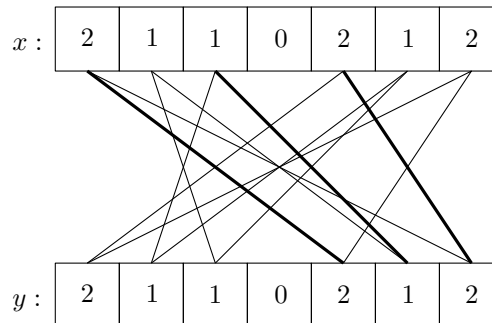
(16 Punkte)

Aufgabe 5

(total Punkte)

Gegeben sei eine Sequenz $x = x_1x_2x_3 \dots x_n$ von n Ziffern (d.h. $x_i \in \{0, \dots, 9\}$). Wir schreiben x selbst und eine Kopie y von x untereinander hin. Falls $i \neq j$ und die Ziffern von x_i und y_j übereinstimmen, so zeichnen wir eine Verbindungslinie zwischen x_i und y_j .

Zum Beispiel ergibt sich für $x = 2110212$ das folgende Bild:



Beachten Sie, dass wir keine Verbindungslinien malen dürfen, wenn in x jede Ziffer höchstens einmal vorkommt.

Eine Teilmenge M von Verbindungslinien heisst *monotones Matching*, wenn M ein Matching ist (d.h. jedes x_i und y_i ist Endpunkt von maximal einer Verbindungslinie in M) und M kreuzungsfrei ist. Im obigen Beispiel ergeben die drei fett gedruckten Linien ein monotones Matching.

Verwenden Sie das Prinzip der dynamischen Programmierung, um einen Algorithmus zu entwerfen, der für ein gegebenes x in Laufzeit $\mathcal{O}(n^2)$ ein grösstes monotones Matching berechnet. Zeigen Sie, dass Ihr Algorithmus korrekt ist und die verlangte Laufzeit erreicht.

(20 Punkte)

Aufgabe 6

(total Punkte)

Entwerfen Sie einen Algorithmus, der, wenn er als Eingabe einen Graphen $G = (V, E)$ und zwei Knoten $s, t \in V$ erhält, in Laufzeit $\mathcal{O}(|E|)$ die Anzahl kürzester s - t -Pfade in G berechnet. Beachten Sie, dass alle Kanten Gewicht 1 haben. Beweisen Sie die Korrektheit des Algorithmus und analysieren Sie die Laufzeit.

(20 Punkte)