ETH Zürich
Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Angelika Steger, Dr. Johannes Lengler
Übungsleitung: Florian Meier

HS 2019
Abgabe 23.010.2018

Algorithmen und Komplexität
Übungsblatt 5

Peer-Grading: Aufgabe 2

Korrektur durch die Assistenten: Aufgaben 1 und 3

⋆ ⋆ ⋆

Aufgabe 1

Ein Mann soll einen Wolf, eine Ziege und einen Korb Kohl über einen Fluss transportieren. Sein Boot hat jedoch nur zwei Plätze zur Verfügung, d.h. er kann immer nur einen der drei transportieren. Ausserdem dürfen der Wolf und die Ziege sowie die Ziege und der Korb Kohl nie allein auf einer Seite des Flusses sein, da sonst der Wolf die Ziege bzw. die Ziege den Korb Kohl frisst.

Formulieren Sie dieses Problem als ein Shortest-Path-Problem auf einem geeigneten Graphen. Ist es möglich, alle drei sicher ans andere Ufer zu bringen? Wenn ja: wie oft muss der Mann den Fluss überqueren?

Aufgabe 2

Gegeben sei ein zusammenhängender Graph $G = (V, E)$ mit Kantengewichtung $w : E \to [0, 1]$. Wir wollen eine Nachricht von einem Startknoten s zu einem Zielknoten t senden. Dabei sei $w(e)$ die Wahrscheinlichkeit, dass eine Übertragung über die Kante e erfolgreich ist. Die Zufallsereignisse, ob die Nachricht über eine Kante übertragen wird oder nicht, sind voneinander unabhängig. Dies bedeuted, dass die Übertragungswahrscheinlichkeit eines Pfades, bestehend aus den Kanten $e_1, \dots, e_k$ gleich dem Produkt seiner Kantengewichte ist. Beschreiben Sie in präzisen Worten einen effizienten Algorithmus, der den zuverlässigsten Übertragungspfad zwischen zwei Knoten s und t bestimmt.

Aufgabe 3

In dieser Aufgabe analysieren wir den Bellman-Ford-Algorithmus zur Bestimmung kürzester $s - v$ Pfade in einem gerichteten Netzwerk $N = (V, A, \ell)$. Der Algorithmus iteriert $|V| - 1$ mal über alle Kanten und überprüft für jede Kante $(u, v) \in E$, ob sie für einen kürzeren $s - v$ benutzt werden kann.

(a) Zeigen Sie Korrektheit des Bellman-Ford Algorithmus. Der Pseudo-Code ist in Algorithmus 1 gegeben.

Hinweis: Zeigen Sie per Induktion, dass nach i Iterationen der For-Schleife folgende Invariante gilt: Falls ein $s - v$ Weg mit i Kanten existiert, dann ist $dist[v]$ die Länge des kürzesten $s - v$ Weges mit maximal i Kanten.

(b) Vergleichen Sie den Bellman-Ford Algorithmus mit den Algorithmen von Dijkstra und Floyd-Warshall in Bezug auf Laufzeit und mögliche Eingaben.

Abgabe der Hausaufgaben in der Vorlesung am 22.10.2019.

Algorithm 1 BELLMAN-FORD(N, s)

Eingabe: Ein zusammenhängendes gerichtetes Netzwerk $N = (V, A, \ell)$ und Knoten s.
Ausgabe: Längen der kürzesten $s - v$ Pfade für alle $v \in V$ bzw. Error, falls ein negativer Kreis existiert.

```
{ Initialisierung }
for all v ∈ V do
    dist[v] = ∞, dist_new[v] = ∞
    pred[v] = nil
end for
dist[s] = 0, dist_new[s] = 0
{ Berechnung der s − v Distanzen }
for i = 1,...,|V| − 1 do
    for all (u,v) ∈ A do
        if dist_new[v] > dist[u] + ℓ(u,v) then
            dist_new[v] = dist[u] + ℓ(u,v)
            pred[v] = u
        end if
    end for
    for all v ∈ V do
        dist[v] = dist_new[v]
    end for
end for
{ Überprüfung, ob negative Kreise existieren }
for all (u,v) ∈ A do
    if dist[v] > dist[u] + ℓ(u,v) then
        return Error: Negativer Kreis existiert.
    end if
end for
return (v_1, dist[v_1]),...,(v_n, dist[v_n])
```