ETH Zürich
Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Angelika Steger, Dr. Johannes Lengler
Übungsleitung: Florian Meier

HS 2019
Abgabe 29.10.2019

Algorithmen und Komplexität
Übungsblatt 6

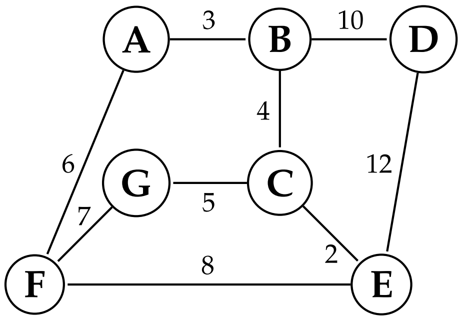
Peer-Grading: Aufgabe 2

Korrektur durch die Assistenten: Aufgaben 1 und 3

⋆ ⋆ ⋆

Aufgabe 1

Gegeben sei folgender Graph $G = (V, E)$.



(a) Zeichnen Sie einen minimalen Spannbaum, den der *Algorithmus von Kruskal* berechnet, und geben Sie die Reihenfolge an, in denen der Algorithmus die Kanten hinzufügt.

(b) Zeichnen Sie einen minimalen Spannbaum, den der *Algorithmus von Prim* berechnet, wenn er im Knoten A startet, und geben Sie die Reihenfolge an, in denen der Algorithmus die Kanten hinzufügt.

(c) Entwerfen Sie einen möglichst effizienten Algorithmus zur Bestimmung eines *maximalen* Spannbaums (ein Spannbaum mit maximaler Summe der Kantengewichte). Zeigen Sie Korrektheit und analysieren Sie die Laufzeit.

(d) Angenommen wir wissen, dass die Algorithmen von Prim und Kruskal für Netzwerke mit positiven Gewichtsfunktionen ℓ korrekt sind. Benutzen Sie diese Annahme um zu zeigen dass die beiden Algorithmen auch für beliebige, möglicherweise negativen Gewichtsfunktionen korrekt sind.

Aufgabe 2

Gegeben ein Netzwerk $N = (V, E, \omega)$ mit einer Gewichtsfunktion $\omega : E \to \mathbb{R}$.

a) Nehmen Sie an, dass die Kante e mit minimalem Gewicht $\omega(e)$ eindeutig ist. Zeigen Sie, dass e in jedem minimalen Spannbaum von N enthalten ist.

b) Nehmen Sie an, dass alle Kantengewichte unterschiedlich sind. Zeigen Sie, dass der minimale Spannbaum T von G eindeutig ist.

Aufgabe 3

Wir betrachten folgende Klasse von Algorithmen zur Bestimmung von minimalen Spannbäumen:
Ein Algorithmus dieser Klasse bekommt als Input ein zusammenhängendes Netzwerk $N = (V, E, \ell)$. Am Anfang seien alle Kanten ungefärbt. In jedem Schritt entscheidet sich der Algorithmus entweder die rote oder die graue Regel auszuführen.

- *Rote Regel:* Der Algorithmus bestimmt eine Teilmenge $\varnothing \neq W \subset V$, so dass der Schnitt $(W, V \setminus W)$ keine rote Kante enthält. Anschliessend wählt er eine ungefärbte Kante $e_0 \in (W, V \setminus W)$ aus dem Schnitt mit

$$\ell(e_0) = \min\{\ell(e) \mid e \in (W, V \setminus W),\ e \text{ ungefärbt}\}$$

  und färbt e_0 rot.

- *Graue Regel:* Der Algorithmus bestimmt einen Kreis C, der keine graue Kante enthält. Anschliessend wählt er eine ungefärbte Kante $e_1 \in C$ mit

$$\ell(e_1) = \max\{\ell(e) \mid e \in C,\ e \text{ ungefärbt}\}$$

  und färbt e_1 grau.

Der Algorithmus stoppt, sobald entweder alle Kanten gefärbt sind oder V zusammen mit den roten Kanten einen zusammenhängenden Graphen bilden. Die roten Kanten bilden dann einen minimalen Spannbaum.

a) *Beweise:* Jeder Algorithmus obiger Klasse terminiert, unabhänging davon in welcher Reihenfolge die beiden Regeln ausgeführt werden (falls eine Regel nicht mehr ausgeführt werden kann, wird die andere ausgeführt). Danach bilden alle roten Kanten einen minimalen Spannbaum.

b) Auch die Algorithmen von Prim und Kruskal, können als Algorithmen dieser Klasse interpretiert werden. Wann wenden sie die rote, wann die graue Regel an?

ABGABE DER HAUSAUFGABEN IN DER VORLESUNG AM 29.10.2019.