ETH Zürich
Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Angelika Steger, Dr. Johannes Lengler
Übungsleitung: Florian Meier

HS 2019
Abgabe 19.11.2019

Algorithmen und Komplexität
Übungsblatt 9

Peer-Grading: Aufgabe 2

Korrektur durch die Assistenten: Aufgaben 1 und 3

⋆ ⋆ ⋆

Aufgabe 1

In eine *Queue* (Warteschlange) kann mit der Operation ENQUEUE(x) ein Objekt x eingefügt werden. Die Operation DEQUEUE() gibt jenes Objekt y zurück, das unter allen Objekten in der Queue als erstes mit ENQUEUE(y) eingefügt wurde. Nach der Rückgabe wird y aus der Queue gelöscht.

In einen *Stack* (Stapel) kann mit der Operation PUSH(x) ein Objekt eingefügt werden. Die Operation POP() gibt jenes Objekt y zurück, das unter allen Objekten im Stack als letztes mit PUSH(y) eingefügt wurde. Nach der Rückgabe wird y aus dem Stack gelöscht.

Verwenden Sie zwei Stacks um eine Queue zu implementieren, so dass die amortisierte Laufzeit der Operationen ENQUEUE und DEQUEUE jeweils $\mathcal{O}(1)$ ist. Sie können dabei annehmen, dass die Operationen POP und PUSH für einen Stack genau einen Zeitschritt kosten.

Aufgabe 2

Zeigen Sie, dass die Höhe eines Fibonacci-Heaps nicht durch $\mathcal{O}(\log n)$ beschänkt werden kann, indem Sie zeigen, dass es zu jeder Zahl n eine Folge von Operationen gibt, die einen Fibonacci-Heap erzeugt, der nur aus einem linear entarteten Baum mit n Schlüsseln besteht. Ein linear entarteter Baum mit n Knoten ist ein Pfad $v_1, \ldots, v_n$, wobei der erste Knoten v_1 die Wurzel ist.

Hinweis: Verwenden Sie Induktion. Angenommen, Sie können einen entarteten Baum mit n Knoten erzeugen – mit welcher Folge von Operationen kann man einen weiteren Knoten hinzufügen?

Aufgabe 3

Sei A eine nichtleere Menge. Es bezeichne $x = x_1 x_2 \ldots x_n$ mit $x_i \in A$ eine *Sequenz* der Länge n über A. Jede Sequenz, die aus x durch Auslassen von gewissen (eventuell keinem) x_i gewonnen werden kann, heisst *Teilsequenz* von x. Beispielsweise sind *abc* und *bbde* Teilsequenzen von *aabbbbcde*, *adf* und *bac* jedoch nicht.

Beim Problem der LÄNGSTEN GEMEINSAMEN TEILSEQUENZ sind zwei Sequenzen $x = x_1 \ldots x_n$ und $y = y_1 \ldots y_m$ gegeben. Gesucht ist eine *längste* Sequenz z, die sowohl von x als auch von y Teilsequenz ist.

Geben Sie einen Algorithmus an, der dieses Problem in Zeit $\mathcal{O}(nm)$ löst und beweisen Sie die Korrektheit des Algorithmus.

Hinweis. Jede Sequenz $x^{(k)} = x_1 x_2 \ldots x_k$ mit $k = 0, \ldots, n$ heisst *Präfix* der Sequenz $x = x_1 x_2 \ldots x_n$. Dabei steht der Fall $k = 0$ für das leere Präfix. Betrachten Sie die Präfixe von x und y, und verwenden Sie das algorithmische Prinzip der dynamischen Programmierung.

Aufgabe 4

Dies ist eine Zusatzaufgabe zum Vorlesungsstoff und ist nicht prüfungsrelevant.

Die *Fibonacci Zahlen* sind mittels $F(0) := 0$, $F(1) := 1$, und $F(n) := F(n-1) + F(n-2)$ für $n \geq 2$ definiert. Zeigen Sie für alle $n \geq 0$, dass

$$F(n) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\phi^n - \psi^n \right),$$

wobei $\phi = (1 + \sqrt{5})/2$ und $\psi = (1 - \sqrt{5})/2$. Zeigen Sie, dass diese Formel $F(n) = \Theta(\phi^n)$ impliziert.

Hinweis: Sie können diese Formel mittels Induktion und widerliche Berechnungen direkt zeigen. Falls Sie verstehen möchten, woher die Formel stammt, dann folgen Sie dieser Anleitung:

1. Zeigen Sie, dass ϕ und ψ Lösungen der Gleichung $x^2 = x + 1$ sind.
2. Zeigen Sie, falls x eine Lösung von $x^2 = x + 1$ ist, dann ist x eine Lösung von $x^n = x^{n-1} + x^{n-2}$ für alle $n \geq 2$. *Hinweis: Dies ist trivial!*
3. Betrachten Sie die Menge $V := \{f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R} \mid f(n) = f(n-1) + f(n-2) \text{ for all } n \geq 2\}$. Zeigen Sie, dass V ein Vektorraum ist, und dass die beiden Funktionen $G(n) := \phi^n$ und $H(n) := \psi^n$ in V enthalten sind. Es ist leicht zu sehen, dass V Dimension 2 hat, und dass G und H eine Basis bilden.
4. Folgern Sie, dass es zwei Konstanten $a, b \in \mathbb{R}$ mit $F = a \cdot G + b \cdot H$ gibt.
5. Berechnen Sie a und b indem Sie die Gleichungen $F(0) = a \cdot G(0) + b \cdot H(0)$ und $F(1) = a \cdot G(1) + b \cdot H(1)$ betrachten.
6. Folgern Sie, dass $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\phi^n - \psi^n)$ für alle $n \geq 0$ gilt.

ABGABE DER HAUSAUFGABEN IN DER VORLESUNG AM 19.11.2019.