ETH Zürich
Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Angelika Steger, Dr. Johannes Lengler
Übungsleitung: Florian Meier

HS 2019
Abgabe 27.11.2018

Algorithmen und Komplexität
Übungsblatt 10

Peer-Grading: Aufgabe 1

Korrektur durch die Assistenten: Aufgaben 2 und 3

⋆ ⋆ ⋆

Aufgabe 1

Das Ziel dieser Aufgabe ist es eine Funktion $f_{diag} : \{0,1\}^* \to \{0,1\}$ zu konstruieren, welche nicht berechenbar ist.

Eine Menge A heisst abzählbar, falls es eine Bijektion zwischen den natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ und der Menge A gibt. Intuitiv bedeutet dies, dass es eine Liste gibt, welche jedes Element von A genau einmal entält.

a) Betrachten Sie die Menge aller $x \in \{0,1\}^*$ und zeigen Sie, dass diese Menge abzählbar ist, indem Sie eine Liste erstellen welche alle solchen x genau einmal enthält.

b) Zeigen Sie, dass auch die Menge aller Programme abzählbar ist, das heisst, dass es eine zweite Liste gibt, welche jedes Programm genau einmal enthält.

c) Konstruieren Sie eine Funktion $f_{diag} : \{0,1\}^* \to \{0,1\}$, welche von keinem Program der zweiten Liste berechnet wird, indem Sie jedem $x \in \{0,1\}^*$ einen geeigneten Wert zuordnen. Folgern Sie, dass Ihre Funktion nicht berechenbar ist.

Aufgabe 2

Gegeben eine Sequenz $a = [a_1, \dots, a_n]$ von ganzen Zahlen. x sei eine *Teilsequenz* von a, falls x durch weglassen einiger Zahlen von a erzeugt werden kann. Etwas formaler, $x = [x_1, \dots, x_k]$ ist eine Teilsequenz von $a = [a_1, \dots, a_n]$ falls Indizes $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$ existieren, sodass $x_j = a_{i_j}$ für $j \in \{1, \dots, k\}$ gilt. x heisst *aufsteigende Teilsequenz* von a falls zusätzlich $x_1 \leq \dots \leq x_k$ gilt, und wir nennen x *gemeinsame Teilsequenz* von zwei Sequenzen a und b, falls x sowohl von a also auch von b Teilsequenz ist.

Wir betrachten die folgenden beiden Entscheidungsprobleme. Es soll 1 bzw. 0 ausgegeben werden, falls die Antwort JA bzw. NEIN ist.

GEMEINSAME TEILSEQUENZ DER LÄNGE k

Eingabe: Zwei Sequenzen $a = [a_1, \dots, a_n]$ und $b = [b_1, \dots, b_n]$ von ganzen Zahlen und eine natürliche Zahl k.

Frage: Haben a und b eine gemeinsame Teilsequenz der Länge k?

AUFSTEIGENDE TEILSEQUENZ DER LÄNGE k

Eingabe: Sequenz $c = [c_1, \dots, c_n]$ von ganzen Zahlen und eine natürliche Zahl k.

Frage: Hat c eine aufsteigende Teilsequenz der Länge k?

Das Ziel dieser Aufgabe ist es, das zweite Problem aufs erste Problem zu *reduzieren*, das heisst zu zeigen, dass ein Algorithmus, welcher das erste Problem löst, benutzt werden kann um das zweite Problem zu lösen. Sei A ein Algorithmus welcher entscheidet, ob a und b eine gemeinsame Teilsequenz der Länge k besitzen. Angenommen A ist korrekt und hat Laufzeit $T(n)$. Zeigen Sie, dass dann ein korrekter Algorithmus B existiert, welcher entscheidet, ob c eine aufsteigende Teilsequenz der Länge k besitzt und welcher Laufzeit $\mathcal{O}(n \log n + T(n))$ hat.

Gehen Sie dabei wie folgt vor:

a) Algorithmus B bekommt (c, k) als Input und soll das zweite Problem lösen indem er einen Input (a, b, k) fürs Programm A konstruiert, Programm A mit diesem Input aufruft und schliesslich die Ausgabe von A ausgibt.

b) Zeigen Sie Korrektheit, indem Sie zeigen dass c genau dann eine aufsteigende Teilsequenz der Länge k besitzt, wenn a und b eine gemeinsame Teilsequenz der Länge k besitzt.

c) Analysieren Sie die Laufzeit von Algorithmus B.

Aufgabe 3

Wir betrachten die Funktion $H_0 : \{0,1\}^* \to \{0,1\}$, die wie folgt definiert ist:

$$H_0(A) := \begin{cases} 1, & \text{wenn } A \text{ ein Programm beschreibt und } A(0) \text{ endliche Laufzeit hat.} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

a) Beweisen Sie, dass H_0 nicht berechenbar ist.

b) Beweisen Sie folgenden Variante des ersten Unvollständigkeitssatzes:
Sei S ein hinreichend mächtige Menge von mathematischen Aussagen, sodass S für alle Programme A die Aussagen "$A(0)$ hält" und "$A(0)$ hält nicht" enthält. Ein Beweissystem für S ist ein Programm V, welches für jede Aussage $s \in S$ und jedes $p \in \{0,1\}^*$ bestimmt, ob p ein gültiger Beweis für s ist. Zeigen Sie, dass für jedes widerspruchsfreie Beweissystem V von S folgendes gilt: Es gibt es ein Programm A, sodass entweder $A(0)$ hält und die Aussage "$A(0)$ hält" ist nicht beweisbar, oder $A(0)$ hält nicht und die Aussage "$A(0)$ hält nicht" ist nicht beweisbar.

ABGABE DER HAUSAUFGABEN IN DER VORLESUNG AM 27.11.2018.