ETH Zürich
Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Angelika Steger, Dr. Johannes Lengler
Übungsleitung: Florian Meier

HS 2019
Abgabe 3.12.2019

Algorithmen und Komplexität
Übungsblatt 11

Peer-Grading: Aufgabe 2

Korrektur durch die Assistenten: Aufgaben 1 und 3

⋆ ⋆ ⋆

Aufgabe 1

Wir betrachten folgende Entscheidungsprobleme

HAMILTONKREIS

Eingabe: Graph $G = (V, E)$

Frage: Besitzt G einen Hamiltonkreis, das heisst, einen Kreis, welcher jeden Knoten genau einmal besucht?

NULLSTELLE MOD N

Eingabe: $n, k \in \mathbb{N}$ und ein Polynom P mit ganzahligen Koeffizienten in k Variabeln $x_1, \ldots, x_k$.

Frage: Besitzt P eine Nullstelle *mod n*?

a) Zeigen Sie, dass HAMILTONKREIS in $\mathcal{NP}$ liegt.

b) Zeigen Sie, dass NULLSTELLE MOD N in $\mathcal{NP}$ liegt. Nehmen Sie dabei an, dass ein Polynom P folgendermassen codiert ist. Für jeden Term $ax_1^{b_1} \ldots x_k^{b_k}$ mit Koeffizient a ungleich Null ist ein $(k+1)$-Tupel bestehend aus Koeffizient und Exponenten abgespeichert. Die Eingabelänge ist dementsprechend gegeben durch $A(\log n + k \log b)$, wobei A die Anzahl Terme im Polynom und b der maximale Koeffizient ist.

Aufgabe 2

Eine boolsche Funktion auf n Variablen ist eine Funktion $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$.

a) Berechnen Sie die Anzahl boolscher Funktionen auf n Variablen.

b) Zeigen Sie, dass jede boolsche Funktion durch eine DNF-Formel (d.h. boolsche Formel in disjunktiver Normalform, siehe Definition 5.8) dargestellt werden kann.

c) Zeigen Sie, dass jede boolsche Funktion durch eine KNF-Formel (d.h. boolsche Formel in konjunktiver Normalform, siehe Definition 5.8) dargestellt werden kann.

d) Zeigen Sie, dass es für jedes $k \geq 1$ eine boolsche Funktion gibt, die *nicht* durch eine k-KNF-Formel (d.h. boolsche Formel in konjunktiver Normalform mit höchstens k Literalen pro Klausel) dargestellt werden kann.

   Hinweis: Betrachten Sie die *XOR*-Funktion auf $k+1$-Variabeln:

$$XOR(x_1, \ldots, x_{k+1}) := \left(\sum_{i=1}^{k+1} x_i \right) \mod 2.$$

Aufgabe 3

Zeigen Sie, dass das Entscheidungsproblem ALMOST 3-SAT $\mathcal{NP}$-vollständig ist.

ALMOST 3-SAT

Eingabe: Variablen $x_1, \ldots, x_n$ und eine Boolsche Formel F in konjuktiver Normalform, in der jede Klausel höchstens 3 Literale entält.

Frage: Gibt es eine Belegung für F, so dass genau eine Klausel nicht erfüllt ist und alle anderen erfüllt sind?

Gehen Sie dabei folgendermassen vor.

a) Zeigen Sie, dass ALMOST 3-SAT $\mathcal{NP}$ in $\mathcal{NP}$ liegt.

b) Zeigen Sie 3-SAT $\leq_P$ ALMOST 3-SAT (siehe Definition 5.13). Die Funktion f soll aus einer Eingabe F für 3-SAT eine Eingabe F' für ALMOST 3-SAT konstruieren, sodass $F \in$ 3-SAT genau dann wenn $F' \in$ ALMOST 3-SAT.

Da 3-SAT $\mathcal{NP}$-vollständig ist (Satz von Cook-Levin 5.18) und da $\leq_P$ transitiv ist, folgt dass ALMOST 3-SAT $\mathcal{NP}$-vollständig ist.

ABGABE DER HAUSAUFGABEN IN DER VORLESUNG AM 3.12.2019.