# Algorithmen & Datenstrukturen

Herbst 2021

Vorlesung 6

# Dynamisches Programmieren (DP)

DP ist nichts anderes als Induktion

DP besteht aus 2 wesentlichen Komponenten:

## 1. Bottom-Up Berechnung von Rekurrenzen

Beispiel: Fibonacci-Zahlen

$$F_1 = F_2 = 1, \quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \text{ für } n \geq 3$$

```
Fib(n)
  if n ≤ 2 : return 1
  f = Fib(n-1) + Fib(n-2)
  return f
```

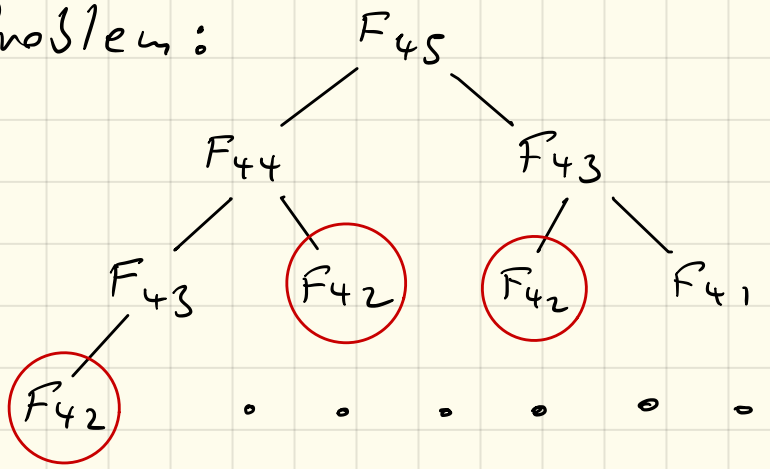
top-down Berechnung

Laufzeit: $T(n) = T(n-1) + T(n-2) + c$ (c: Konstant)

$$\geq 2\,T(n-2)$$

Also $T(n) \geq \Omega(2^{n/2}) = \Omega(\sqrt{2}^n)$ sehr!

Problem:



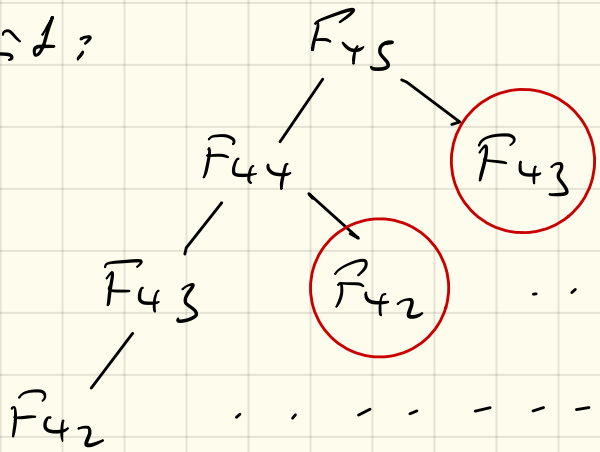

mehrfach berechnet

Idee: merken! (Memoization)

```
FibM(n)
  if n∈M: return memo[n]
  if n ≤ 2: f = 1
  else f = FibM(n-1) + FibM(n-2)
  memo[n] = f
  return f
```

Top-down Berechnung mit Memoization

Laufzeit:




schon berechnet!

⇒ Laufzeit $O(n)$ !

Alternative: <u>bottom-up Tabelle füllen</u>

```
F[1] = 1
F[2] = 1
for i = 3..n: F[i] = F[i-1] + F[i-2]
```

Laufzeit: $O(n)$, Speicher: $O(n)$

Es geht auch mit Speicher $O(1)$
(nur letzte 2 merken)

Was hat das mit Algorithmen zu tun?
Es gibt Probleme die durch eine geeignete Rekurrenz induktiv gelöst werden.

## 2. Design der Rekurrenz (Induktion)

Gegeben: Problem, gesucht: DF Algorithmus

Finde die Lösung induktiv (z.B. $i = 1..n$):

Für fixes $i$ finde heraus wie Lösung($i$) aus Lösungen($j$), $j < i$ entsteht. Manchmal muss man die Problembeschreibung anpassen.

Beispiel: Maximum Subarray Sum

| $a_1$ $a_2$ | $a_4$ |
|---|---|

$R_j = \max_{i \le j} S_{ij}$ $\quad (S_{ij} = a_i + \ldots + a_j)$ "Randmaximum"

Berechnung:

$R_0 = 0$

$$R_j = \begin{cases} R_{j-1} + a_j, & \text{falls } R_{j-1} \ge 0 \\ a_j, & \text{sonst} \end{cases}$$

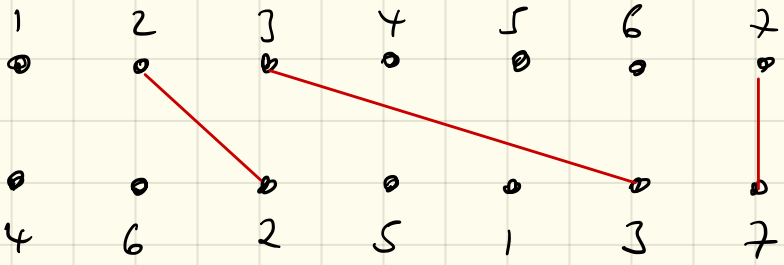
Ergebnis: $\max_j R_j$

Ist eine Rekurrenz, wird bottom-up berechnet

INV($j$): wir haben alle $R_i$, $i = 1..j$

eigentlich: wir haben $R_j$ und grösstes $R_i$ unter $R_1, \ldots, R_j$

# Längste aufsteigende Teilfolge




(Permutation)

Finde längste aufsteigende Teilfolge
Maximale Anzahl Verbindungen

Äquivalent: Finde längste aufsteigende Teilfolge in einem Array von n Zahlen

A[1] A[n]

2 3, 2 9 13 11 17 4 78 28 13 105

Wir nennen Lat(i) = längste aufsteigende TF in den ersten i Elementen

Designe Induktion!

Grundidee: Lat(i) = Lat(i-1) + A[i] anhängen falls möglich

1. Invariante: Wir haben Lat(i-1)

Fall 1: A[i] passt → Lat(i) ✓
Fall 2: A[i] passt nicht

Problem: Lat ist nicht eindeutig

Lat = 125

| 1 | 10 | 2 | 5 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|

also brauchen wir mehr als Lat(i-1)

2. Invariante: Wir haben alle Lat(i-1)

Fall 1: A[i] passt an mindestens eine
→ alle Lat(i) durch Anhängen wo passt
Fall 2: A[i] passt an keine

Problem: es kann neue Lats geben also
muss man sich auch Kürzere merken

| 1 | 2 | 8 | 5 | 3 |
|---|---|---|---|---|

Lats: 128
125

neues
Lat 123

Damit müsste man sich alle aufsteigenden
TFs merken → zu teuer

3. Invariante: Wir haben die Lat(i-1) die
mit dem kleinsten Element
aufhört

Fall 1: A[i] passt → Lat(i) (und erhält Bedingung)
Fall 2: passt nicht

| 1 | 2 | 8 | 7 | 6 |
|---|---|---|---|---|

Lat = 127

Lat wird besser: 126
→ Austausch notwendig

Also brauchen
wir auch die kürzeren die mit dem kleinsten
Element aufhören

4. Invariante: Wir haben für jede Länge die aufsteigende TF die mit dem kleinsten Element aufhört

Wenn man am Ende nur die Länge will genügt es sich die Endwerte zu merken.

Beispiel: 4 9 8 13 10 11 7 3 16

| Länge | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Endwert | ~~4~~ | ~~9~~ | ~~13~~ | 11 | 16 | |
| | 3 | ~~8~~ | 10 | | | |
| | | 7 | | | | |

ist aufsteigend sortiert

Vorgänger

updates

Lösung: 4 8 10 11 16

⇒ Länge = 5

Fall 1: A[i] passt ✓ (→ neue Länge)

Fall 2: passt nicht
senke den Endwert einer TF deren Endwert > A[i] und Endwert der eins kleineren TF < A[i]

Nur eine Änderung!

Um die Folge zu bekommen, merke Vorgänger von jedem Endwert (= Endwert zur Länge) in Extra array ⇒ Lösung durch Rückverfolgen.

Vorgänger: O(n) Extraplatz (Skript).

Laufzeit: In jeder Iteration wird ein Element (Tabelle) verändert, Stelle durch feste Zahl

$$\Rightarrow T(n) \leq \sum_{i=1}^{n} c \log(i) \leq O(n \log n)$$

Lösung Lat auslesen: $O(n)$ (Skript)
Speicher: $O(n)$ (Tabelle)

## Längste gemeinsame Teilfolge

C O V I D 1 9
P A R T Y
(keine)

T I G E R
Z I E G E

A[1..n]
B[1..m]

Schreibe so hin dass man es sieht: (Alignment)

T I _ G E R
Z I E G E _

LGT(n, m) = Länge LGT von A[1..n] u. B[1..m]

Betrachte Ende: 4 Fälle

1. $\begin{matrix} X \\ - \end{matrix}$ $\Rightarrow LGT(n,m) = LGT(n-1, m)$

2. $\begin{matrix} - \\ X \end{matrix}$ $\Rightarrow LGT(n,m) = LGT(n, m-1)$

3. $\begin{matrix} X \\ Y \end{matrix}$, $X \neq Y$ $\Rightarrow LGT(n,m) = LGT(n-1, m-1)$

4. $\begin{matrix} X \\ X \end{matrix}$ $\Rightarrow LGT(n,m) = LGT(n-1, m-1) + 1$

↳ also A[n] = B[m]

Also Induktion:

$$LGT(i,j) = \max\begin{cases} LGT(i-1,j), \\ LGT(i,j-1), \\ LGT(i-1,j-1) + 1 \text{ falls } A[i] = B[j] \end{cases}$$

"top-down"

Basis:

$LGT(0,\cdot) = LGT(\cdot,0) = 0$

irgendwas ↑ ↑ keine Zeichen

Berechnung "bottom-up" durch Füllen von Tabelle:

| LGT | - | T | I | G | E | R |
|---|---|---|---|---|---|---|
| - | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| Z | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| I | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| E | 0 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 |
| G | 0 | 0 | 1 | 2 | 2 | 2 |
| E | 0 | 0 | 1 | 2 | 3 | 3 |

↑ Länge

Lösung wieder durch Rückverfolgen

Merke von jedem Eintrag einen Vorgänger

Jedes Feld $(i,j)$ mit $A[i] = B[j]$ gibt einen Buchstaben

Laufzeit: $O(mn)$, Speicher: $O(mn)$

## Minimale Editierdistanz

Gegeben zwei Zeichenfolgen $A[1..n]$, $B[1..m]$

Editieroperationen:

- Zeichen einfügen
- Zeichen löschen
- Zeichen ändern

| | | |
|---|---|---|
| | T I G E R | 3 Operationen (ist minimal) |
| ändern → | 2 I G E R | |
| einfügen → | 2 I E G E R | |
| löschen → | 2 I E G E _ | |

Gesucht: Minimale Anzahl Ops $A \longrightarrow B$.

Induktion: Betrachte zweier letzte Elemente

$$ED(i,j) = \min \begin{cases} ED(i-1,j)+1 & \leftarrow A[i] \text{ löschen} \\ ED(i,j-1)+1 & \leftarrow B[j] \text{ hinzufügen} \\ ED(i-1,j-1)+1 \text{ falls } A[i] \neq B[j] & \leftarrow A[i] \text{ durch } B[j] \text{ ersetzen} \end{cases}$$

$$ED(i,0) = i$$
$$ED(0,j) = j$$

Man muss sich noch genau überlegen dass diese Regel das Minimum produziert (Widerspruchsbeweis)

$A[1..n]$

| ED | - | T | I | G | E | R |
|---|---|---|---|---|---|---|
| - | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 2 | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| I | 2 | 2 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| E | 3 | 3 | 2 | 2 | 2 | 3 |
| G | 4 | 4 | 3 | 2 | 3 | 3 |
| E | 5 | 5 | 4 | 3 | 2 | 3 |

$B[1..m]$

① Anzahl Ops

Lösung kann durch Rückverfolgen rekonstruiert werden.

- : $A[i]$ löschen
- I : $B[j]$ einfügen
- \ : nichts (wenn gleich) oder $A[i]$ durch $B[j]$ ersetzen

Lösung hier:

T I G E R ↘ ①'
T I G E ↘ ②'
T I E G E ↘ ③
2 I E G E

Laufzeit: $O(nm)$
Speicher: $O(nm)$

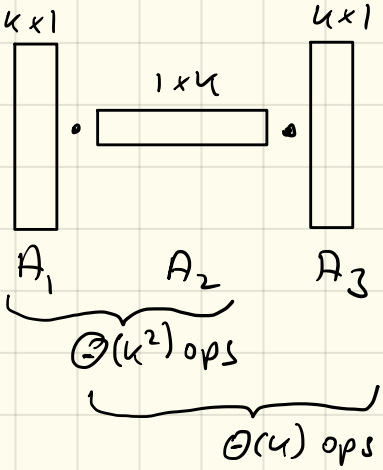
# Matrix Kettenmultiplikation

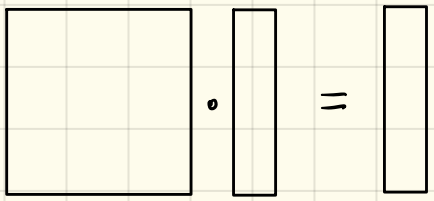
Problem: Berechne $A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n$ so günstig wie möglich. $A_i$ sind Matrizen.

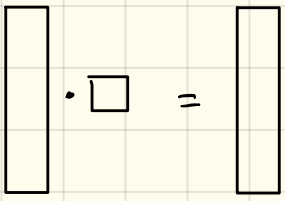
Freiheitsgrad: Assoziativität = Klammerung

z.B. $(A_1 A_2) A_3 = A_1 (A_2 A_3)$

Beispiel:




$(A_1 A_2) A_3$ =  $\Theta(4^2)$ ops insgesamt

$A_1 (A_2 A_3)$ =  $\Theta(4)$ ops insgesamt

Idee: Betrachte die letzte Multiplikation einer optimalen Lösung

$$A_1 A_2 \cdots A_n = \underbrace{(A_1 \cdots A_i)}\,\underbrace{(A_{i+1} \cdots A_n)}$$

Klammerung links/rechts ist optimal

$M(p,q)$ = min Ops zur Berechnung Produkt $A_p \cdots A_q$

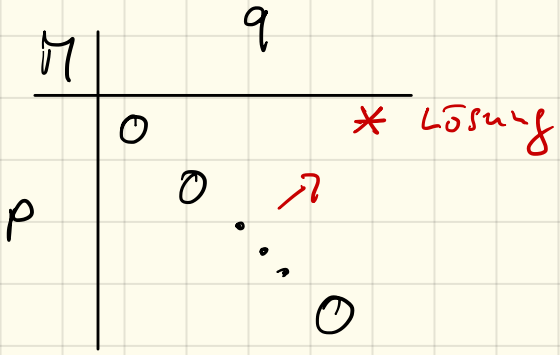
Rekurrenz:

Berechnung $O(q-p)$

$$M(p,q) = \min_{p \le i < q} \left( M(p,i) + M(i+1,q) + \text{Kosten zur Berechnung } (A_p \cdots A_i) \cdot (A_{i+1} \cdots A_q) \right)$$
$$p \le q$$

Basis: $M(p,p) = 0$, $p = 1 \ldots n$

In welcher Reihenfolge berechnen?
Von kurzen zu langen Produkten, also von der Diagonale weg:




In $M(p,q)$ gilt ja immer $p \le q$

Laufzeit: $O(n^3)$ Speicher: $O(n^2)$

Beispiel $A_1 A_2 A_3$ von zuvor, betrachte nur Mults

| | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 4² | 24 |
| 2 | | 0 | 4 |
| 3 | | | 0 |