Algorithmen & Datenstrukturen

Herbst 2022

Vorlesung 6

Dynamische Programmierung, Teil 1

Dynamisches Programmieren (DP)

DP ist nichts anderes als Induktion

DP besteht aus 2 wesentlichen Komponenten:

1. Bottom-Up Berechnung von Rekurrenzen

Beispiel: Fibonacci-Zahlen

$$F_1 = F_2 = 1, \quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \text{ für } n \geq 3$$

```
Fib(n)
  if n ≤ 2 : return 1
  f = Fib(n-1) + Fib(n-2)
  return f
```

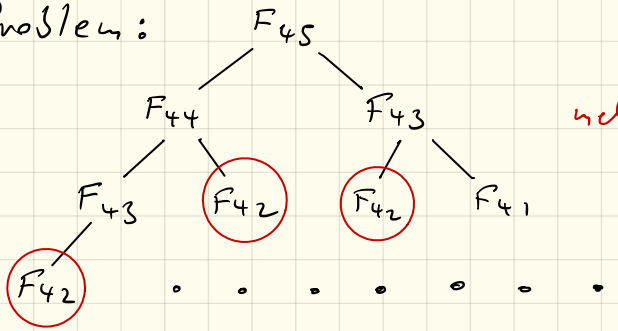
Top-down Berechnung

Laufzeit: $T(n) = T(n-1) + T(n-2) + c$ (c: konstant)

$$\geq 2\,T(n-2)$$

Also $T(n) \geq \Omega(2^{n/2}) = \Omega(\sqrt{2}^n)$ sehr!

Problem:



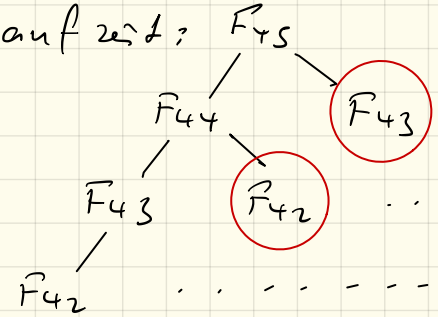
mehrfach berechnet

Idee: merken! (Memoization)

```
FibM(n)
  if n de gespeichert: return memo[n]
  if n ≤ 2: f = 1
  else f = FibM(n-1) + FibM(n-2)
  memo[n] = f
  return f
```

Top-down Berechnung mit Memoization

Laufzeit:



schon berechnet!

$\Rightarrow$ Laufzeit $O(n)$!

Alternative: bottom-up Tabelle bauen

```
F[1] = 1, F[2] = 1
for i = 3..n: F[i] = F[i-1] + F[i-2]
```

Laufzeit: $O(n)$, Speicher: $O(n)$

Es geht auch mit Speicher $O(1)$
(nur letzte 2 merken)

Was hat das mit Algorithmen zu tun?
Es gibt Probleme die durch eine geeignete Rekursion induktiv gelöst werden.

2. Design der Rekurrenz (Induktion)

Gegeben: Problem, gesucht: DP Algorithmus

Finde die Lösung induktiv (z.B. $i = 1 \dots n$):

Für fixes i finde heraus wie Lösung(i) aus Lösungen(j), $j < i$ entsteht. Manchmal muss man die Problembeschreibung anpassen.

Beispiel: Maximum Subarray Sum $\boxed{a_1 a_2 \cdots \cdots a_n}$

$R_j = \max_{i \le j} S_{ij}$ $\quad (S_{ij} = a_i + \dots + a_j)$ "rand max"

$R_0 = 0$, $M_0 = 0$

for $j = 1 \dots n$

  if $R_{j-1} \ge 0$: $R_j = R_{j-1} + a_j$ } rand max$(j-1)$
  else $R_j = a_j$ } $\to$ rand max(j)
  if $R_j > M_{j-1}$: $M_j = R_j$ } Lösung$(j-1)$
  else $M_j = M_{j-1}$ } $\to$ Lösung(j)

Ist eine Rekurrenz, wird bottom-up berechnet

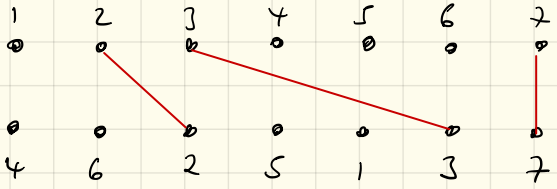
INV(j): wir haben Lösung bis j (M_j)
wir haben rand max$_j$ (R_j)

Tabelle:

i	0	1	2		n
R	0				
M	0				X ← Lösung

es reicht immer nur letzte Spalte zu merken

Längste aufsteigende Teilfolge



(Permutation)

Verbinde ohne Kreuzen
Maximiere Anzahl Verbindungen

Äquivalent: Finde längste aufsteigende Teilfolge in einem Array von n Zahlen

A[1] A[n]

z.B. 2 9 13 11 17 4 78 28 13 105

Wir nennen Lat(i) = längste aufsteigende TF in den ersten i Elementen

Designe Induktion!

Grundidee: Lat(i) = Lat(i-1) + A[i] anhängen falls möglich

1. Invariante: Wir haben Lat(i-1)

Fall 1: A[i] passt → Lat(i) ✓
Fall 2: A[i] passt nicht

Problem: Lat ist nicht eindeutig

Lat = 125

1	10	2	5	3	4

also brauchen wir mehr als Lat(i-1)

2. Invariante: Wir haben alle Lat(i-1)

Fall 1: A[i] passt an mindestens eine
→ alle Lat(i) durch Anhängen wo passt
Fall 2: A[i] passt an keine

Problem: es kann neue Lats geben also
muss man sich auch Kürzere merken

1	2	8	5	3

Lats: 128 neues
125 Lat 123

Damit müsste man sich alle aufsteigenden
TFs merken → zu teuer

3. Invariante: Wir haben die Lat(i-1) die
mit dem kleinsten Element
aufhört

Fall 1: A[i] passt → Lat(i) (und erhält Bedingung)
Fall 2: passt nicht

1	2	8	7	6

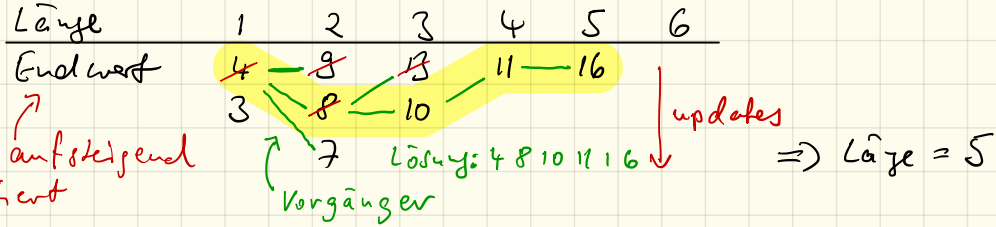
Lat = 127 Lat wird besser: 126
→ Austausch notwendig

Also brauchen
wir auch die Kürzeren die mit dem kleinsten
Element aufhören

4. Invariante: Wir haben für jede Länge die aufsteigende TF die mit dem kleinsten Element aufhört

Wenn man am Ende nur die Länge will genügt es sich die Endwerte zu merken.

Beispiel: 4 9 8 13 10 11 7 3 16



Fall 1: A[i] passt ✓ (→ neue Länge)

Fall 2: passt nicht
senke den Endwert einer TF deren Endwert > A[i] und Endwert der eins kleineren TF < A[i]

Nur eine Änderung!

Um die Folge zu bekommen, merke Vorgänger von jedem Endwert (= Endwert nur kleiner) in Extra array ⇒ Lösung durch Rückverfolgen.

Vorgänger: O(n) Extraplatz (Skript).

Laufzeit: In jeder Iteration wird ein Element (Tabelle) verändert, Stelle durch feinere Suche

$$\Rightarrow T(n) \leq \sum_{i=1}^{n} c \log(i) \leq O(n \log n)$$

Lösung Lat auslesen: $O(n)$ (Skript)
Speicher: $O(n)$ (Tabelle)

Längste gemeinsame Teilfolge

S T U D I U M
P A R T Y

T I G E R
Z I E G E

A[1..n]
B[1..m]

Schreibe so hin dass man es sieht: (Alignment)

T I _ G E R
Z I E G E _

LGT(n, m) = Länge LGT von A[1..n] u. B[1..m]

Betrachte Ende: 4 Fälle

1. $\begin{matrix} X \\ - \end{matrix}$ $\Rightarrow$ $LGT(n,m) = LGT(n-1, m)$

2. $\begin{matrix} - \\ X \end{matrix}$ $\Rightarrow$ $LGT(n,m) = LGT(n, m-1)$

3. $\begin{matrix} X \\ Y \end{matrix}$, $X \neq Y$ $\Rightarrow$ $LGT(n,m) = LGT(n-1, m-1)$

4. $\begin{matrix} X \\ X \end{matrix}$ $\Rightarrow$ $LGT(n,m) = LGT(n-1, m-1) + 1$

↳ also $A[n] = B[m]$

Ich weiß nicht welcher Fall zum Ziel führt, also:

$$LCT(i,j) = \max\begin{cases} LCT(i-1,j), \\ LCT(i,j-1), \\ LCT(i-1,j-1) + 1 \text{ falls } A[i] = B[j] \end{cases}$$

"top-down"

Basis:

$LCT(0,\cdot) = LCT(\cdot,0) = 0$

irgendwas ↑ ↑ keine Zeichen

Berechnung "bottom-up" durch Füllen von Tabelle:

A[1..n]

LCT	-	T	I	G	E	R
-	0	0	0	0	0	0
Z	0	0	0	0	0	0
I	0	0	1	1	1	1
E	0	0	1	1	2	2
G	0	0	1	2	2	2
E	0	0	1	2	3	3

B[1..m]

↑ Länge

Lösung wieder durch Rückverfolgen

Merke von jedem Eintrag einen Vorgänger

Jedes Feld (i,j) mit A[i] = B[j] gibt einen Buchstaben

Laufzeit: $O(nm)$, Speicher: $O(nm)$

Minimale Editierdistanz

Gegeben zwei Zeichenfolgen A[1..n], B[1..m]

Editieroperationen:

- Zeichen einfügen
- Zeichen löschen
- Zeichen ändern

	T I G E R	3 Operationen (ist minimal)
ändern →	2 I G E R	
einfügen →	2 I E G E R	
löschen →	2 I E G E	

Gesucht: Minimale Anzahl Ops $A \longrightarrow B$.

Induktion: Betrachte weder letzte Elemente

$$ED(i,j) = \min\begin{cases} ED(i-1,j)+1 & \leftarrow A[i] \text{ löschen} \\ ED(i,j-1)+1 & \leftarrow B[j] \text{ hinzufügen} \\ ED(i-1,j-1)+1 \text{ falls } A[i] \neq B[j] & \leftarrow A[i] \text{ durch } B[j] \text{ ersetzen} \end{cases}$$

$ED(i,0) = i$
$ED(0,j) = j$

Man muss sich noch genau überlegen dass diese Regel das Minimum produziert (Widerspruchsbeweis)

ED	-	T	I	G	E	R
-	0	1	2	3	4	5
2	1	1	2	3	4	5
I	2	2	1	2	3	4
E	3	3	2	2	2	3
G	4	4	3	2	3	3
E	5	5	4	3	2	3

A[1..n] (Spalten) B[1..m] (Zeilen)

Anzahl Ops

Lösung kann durch Rückverfolgen rekonstruiert werden.

- : A[i] löschen
- 1 : B[j] einfügen
- \ : nichts (wenn gleich) oder A[i] durch B[j] ersetzen

Lösung hier:

T I G E R
T I G E (1)
T I E G E (2')
2 I E G E (3)

Laufzeit: $O(nm)$
Speicher: $O(nm)$